九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 在 ΔABC 中，設 D 為 $\overline{BC}$ 邊上一點，$\overline{AB}>\overline{BD}$，且 $\angle ABC$ 的平分線與 $\overline{AC}$ 交於 E。試證：$\overline{AE}=\overline{DE}$ 的充要條件為 A, B, D, E 四點共圓。

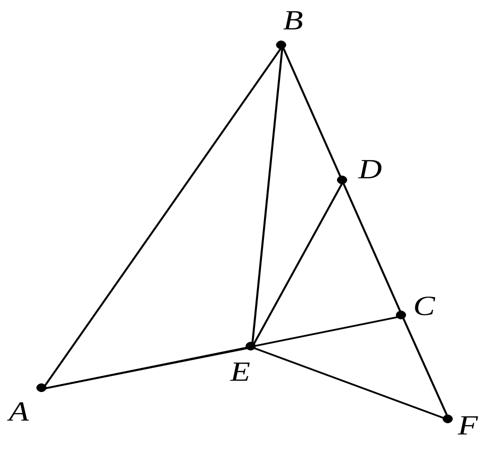
試題來源	■ 自　編　　□ 改編於：		
類　　別	□ 代　數　　□ 數　論　　□ 組　合　　■ 幾　何		
難 易 度	□ 難　　■ 中等　　□ 易	**編　　號**	筆試(二)第一題

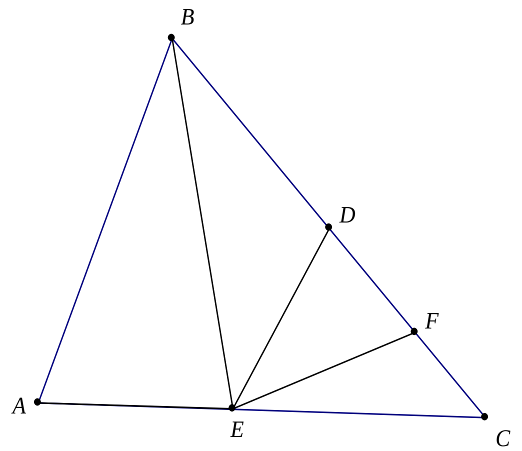
參考解答：

(1)　設 $\overline{AE}=\overline{DE}$

在射線 $\overrightarrow{BC}$ 上取一點 F 使 $\overline{BF}=\overline{BA}$，則 $\Delta ABE\cong\Delta FBE$；於是，$\overline{AE}=\overline{EF}$。因此，$\overline{DE}=\overline{AE}=\overline{EF}$。於是，$\angle EDC=\angle EFB=\angle BAC$；由此可得

$\angle BDE+\angle BAC=(180^\circ-\angle EDC)+\angle BAC=180^\circ$，故 A, B, D, E 四點共圓。





(2)　設 A, B, D, E 四點共圓

由 $\angle A=\angle EDC, \angle ABD=\angle DEC$，可得 $\Delta CAB\sim\Delta CDE$，因此，$\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{EC}}{\overline{BC}}$，

即 $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$。又因 $\overline{BE}$ 為 $\angle ABC$ 的平分線，可得 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$；由此可知

$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EC}}$，故 $\overline{AE}=\overline{DE}$。

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="5">題目：有一非常大的正整數 n，它除了不可被 1 至 250 中某兩連續正整數 $k, k+1$ 整除外，都可被 1 至 250 中其他的整數整除，試求 k 之值。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="4">□ 自　編　　■ 改編於：華盛頓大學挑戰題</td></tr>
<tr><td>類　　別</td><td colspan="4">□ 代 數　　■ 數 論　　□ 組 合　　□ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難　　■ 中等　　□ 易</td><td>編　號</td><td colspan="2">筆試(二)第二題</td></tr>
</table>

參考解答：

(1) 首先，證明$k>125$：

當 $k\le 125$ 時，因為 n 不可被 k 整除，得 n 也不可被 $2k$ 整除，但$1<2k\le 250$，此與已知條件矛盾。

(2) 證明 $k, k+1$ 必為質數或質數之次方：

假設 k 可分解成 $k=rs$，其中 r, s 互質。因為 k 不整除 n，則 r 不整除 n 或 s 不整除 n，此與已知條件矛盾。故 k 必為質數或質數之次方。同理可證，$k+1$ 亦為質數或質數之次方。

(3) 另一方面，$k, k+1$ 中必有一為偶數，所以 $k, k+1$ 中必有一為 2 的次方。但是介於 125 至 250 之間之 2 的次方為 $2^7=128$，故 128 為一不可整除 n 之數。另一數可能為 127 或 129，又因 $129=3\times 43$，而 127 為一質數，所以 127 為另一不可整除 n 之數。故兩數為 127,128，即 $k=127$。

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 在直角坐標平面上，給定相異兩點 A, B ，試證：平面上可以找到由有限個點所組成的集合 Ω ，同時滿足以下兩條件：

(1) Ω 必須包含 A, B 兩點，

(2) 對 Ω 中每一個點 P ，在 Ω 中至少還有 2008 個點 X 滿足 $\overline{PX}=1$ 。

試題來源	□ 自 編　■ 改編於：1996 Crux Math.			
類　　別	□ 代 數　□ 數 論　■ 組 合　□ 幾 何			
難 易 度	■ 難　□ 中等　□ 易	**編　號**	筆試(二)第三題	

參考解答：

首先，利用數學歸納法可以證明：對任意的正整數 n，平面上都存在一有限集合 Ω_n 滿足以下兩條件：

(1) Ω_n 至少包含 $n+1$ 個點，

(2) 對 Ω_n 中每一個點 P ，在 Ω_n 中至少還有 n 個點 X 滿足 $\overline{PX}=1$ 。

當 $n=1$ 時，可以取 Ω_1 為一單位長的兩端點。

當 $n=2$ 時，可以取 Ω_2 為邊長 1 的正三角形的三個頂點。

假設命題對 $n=k$ 時成立，即存在一有限集合 Ω_k 滿足兩條件。取平面上一單位向量 $\bar{u}$ 使 $\bar{u}$ 與 Ω_k 中任意兩點決定的向量都不平行，並將 Ω_k 的點依 $\bar{u}$ 的方向平移一單位，可得另一組與 Ω_k 個數相同的點集合 S ，則 $\Omega_k \cap S=\varnothing$ 。於是，若取 $\Omega_{k+1}=\Omega_k \cup S$ ，則 Ω_{k+1} 滿足兩條件：

(1) Ω_{k+1} 至少含有 $2k+2$ 個點，其中 $2k+2 \geq (k+1)+1$

(2) 對 Ω_{k+1} 中每一個點 P ，在 Ω_{k+1} 中至少還有 $k+1$ 個點 X 滿足 $\overline{PX}=1$ 。

特別的，有限集合 Ω_{2008} 滿足以下條件：

對 Ω_{2008} 中每一個點 P ，在 Ω_{2008} 中至少還有 2008 個點 X 滿足 $\overline{PX}=1$ 。

現在，若給定相異兩點 A, B，則任取 Ω_{2008} 中一點 P ，並將 Ω_{2008} 中的每一個點，分別依 $\overrightarrow{PA}$ 及 $\overrightarrow{PB}$ 的方向平移，設得到的點集分別為 Ω_A 及 Ω_B ；若取 $\Omega=\Omega_A \cup \Omega_B$ ，則 Ω 包含 A, B 兩點，且對 Ω 中每一個點 P ，在 Ω 中至少還有 2008 個點 X 滿足 $\overline{PX}=1$ 。