

# 九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

## 筆試試題（一）

注意事項：

- (1) 時間：2 小時（13:30~15:30）
  - (2) 配分：每題皆為 35 分
  - (3) 不可使用計算器
  - (4) 請將答案依序寫在答案卷內
- 

一、設實數  $\lambda \geq 1$ ，且實係數多項式函數  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

滿足：

$$\lambda a_0 + \sum_{k=1}^n a_k = 0。$$

試證： $f(x) = 0$  在  $0 \leq x \leq 1$  的範圍內至少有一實根。

二、設  $a, b, c$  為正實數，試證： $\frac{a^4}{b^3} + \frac{b^4}{c^3} + \frac{c^4}{a^3} \geq \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}。$

三、設  $P$  為  $\triangle ABC$  內部一點，且  $P$  到三邊  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  的垂足分別為  $X, Y, Z$ ，並設  $\triangle APB$  及  $\triangle APC$  的內心分別為  $Q, R$ ，且

$$\angle APB - \angle C = \angle CPA - \angle B。$$

- (1) 試證： $\angle YXZ = \angle BPC - \angle A$ ；
- (2) 試證： $AP, BQ, CR$  三線共點。