九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：設 a 為實數，且方程式 $x^4+4x^3-6x^2+ax+20=0$ 的四個根之中，有兩根的乘積等於 -5，試求 a 的值，及其對應的所有根。				
試題來源	■ 自　編　　□ 改編於：			
類　　別	■ 代 數　　□ 數 論　　□ 組 合　　□ 幾 何			
難 易 度	□ 難　□ 中等　■ 易	**編　號**	獨立研究(二)第一題	

參考解答：

令 $f(x)=x^4+4x^3-6x^2+ax+20=0$ 的四個根為 p,q,r,s，其中 $rs=-5$，則由根與係數關係，得 $pqrs=20$，故得 $pq=-4$。因此，$f(x)$ 可以表成

$$f(x)=x^4+4x^3-6x^2+ax+20=(x^2+ux-5)(x^2+vx-4)\text{ 。}$$

展開比較係數，得

$$u+v=4,\quad uv-9=-6,\quad -4u-5v=a\text{ 。}$$

解聯立方程式 $\begin{cases} u+v=4 \\ uv=3 \end{cases}$，可得 $(u,v)=(3,1)$ 或 $(u,v)=(1,3)$ 。

(1)　當 $(u,v)=(3,1)$ 時，$a=-4u-5v=-17$，此時，$f(x)=0$ 的四個根為

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2},\quad \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\text{ 。}$$

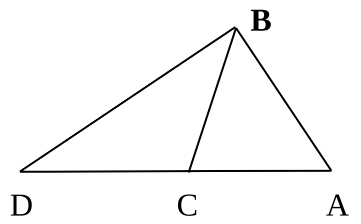
(2)　當 $(u,v)=(1,3)$ 時，$a=-4u-5v=-19$，此時，$f(x)=0$ 的四個根為

$$x=-4,\quad 1,\quad \frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}\text{ 。}$$

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：設 ΔABC 中，$\angle C = 2\angle B$。試證：$27\overline{AB}^2 \cdot \overline{AC} > 4\overline{BC}^3$。				
試題來源	■ 自 編　□ 改編於：			
類　　別	□ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　■ 幾 何			
難 易 度	□ 難　■ 中等　□ 易	**編　號**	獨立研究(二)第二題	

參考解答：



在射線 $\overrightarrow{AC}$ 上選取一個點 D，使得 $\overline{CD} = \overline{CB}$ 且點 A 與點 D 在直線 BC 異側。因為 ΔCBD 是等腰三角形，而且 $\angle C = 2\angle B$，可得 $\angle CDB = \angle ABC$。於是，$\Delta ACB \sim \Delta ABD$。由此可得 $\overline{AB}^2 = \overline{AC} \times \overline{AD}$。於是，得

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}(\overline{AC} + \overline{CD}) = \overline{AC}(\overline{AC} + \overline{BC})。$$

令 $\overline{AC} = u^2$ 及 $\overline{AC} + \overline{BC} = v^2$，其中，$u$ 與 v 為正數，則可得 $\overline{AB} = uv$ 及 $\overline{BC} = v^2 - u^2$。再由 $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$ 可得 $u > v - u$ 或 $u/v > 1/2$。於是，得

$$\frac{\overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}}{\overline{BC}^3} = \frac{u^4 v^2}{(v^2 - u^2)^3} = \frac{(u/v)^4}{(1 - u^2/v^2)^3} > \frac{(1/2)^4}{(1 - 1/4)^3} = \frac{4}{27}。$$

第一段另證：$\angle C = 2\angle B \Leftrightarrow \cos C = \cos 2B \,(= 2\cos^2 B - 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(c^2 + a^2 - b^2)^2}{2c^2 a^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow ac^2(a^2 + b^2 - c^2) = b(c^2 + a^2 - b^2)^2 - 2a^2bc^2$$

$$\Leftrightarrow b^5 - 2(c^2 + a^2)b^3 - ac^2b^2 + (c^4 + a^4)b + ac^2(c^2 - a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b + a)(b^2 + ab - c^2)(b^2 - 2ab + a^2 - c^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 + ab - c^2 = 0 \Leftrightarrow c^2 = b(b + a)。$$

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：	考慮所有可能的正整數數列 $A=\langle a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n \rangle$，其中 $n\ge 100$ 且數列 A 中任意連續若干項之和都不等於 100，令 $f(A)$ 表示數列 A 中各項的最大數，例如：若 $A=\langle 97, 98, 1, 2, 5, 96, 7, 7, 7, \cdots, 7 \rangle$，則 $f(A)=98$。試求 $f(A)$ 的最小值。			
試題來源	□ 自 編　■ 改編於：2004 年 中等數學 No. 1			
類　別	□ 代 數　□ 數 論　■ 組 合　□ 幾 何			
難易度	■ 難　□ 中等　□ 易	**編　號**	獨立研究(二)第三題	

參考解答：

首先證明：若數列 A 中各項都是 1 或 2，則 A 中必有連續若干項之和等於 100。

考慮 $A=\langle a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n \rangle$ 的前 100 項，每一項 $a_j \in \{1,2\}$，令

$$S_0=0,\ S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2, \cdots,\ S_{100}=a_1+a_2+\cdots+a_{100}\ 。$$

因為 $0=S_0<S_1<S_2<\cdots<S_{100}\le 200$，由鴿籠原理可知：這101個數除以100必有兩數同餘，故存在 $0\le m<n\le 100$ 使得 $S_m-S_n=100k$。由於每一項 $a_j\in\{1,2\}$，故 $k=1$ 或 $k=2$。

（1）當 $k=1$ 時，$S_n-S_m=100$，這表示 $a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n=100$。

（2）當 $k=2$ 時，$S_n-S_m=200$，此時 $m=0, n=100$，且每一項 $a_j=2$，故

$$a_1+a_2+\cdots+a_{50}=100\ 。$$

因此，由上面的結果可知：欲使數列 $A=\langle a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n \rangle$ 中任意連續若干項之和都不等於 100，則必有一項之值大於或等於 3；故 $f(A)\ge 3$。

其次，我們可以構造一數列 $A=\langle a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n \rangle$ 如下：

$$a_n=\begin{cases} 1 & 當\ n=100k+1 \\ 3 & 當\ n=100k+51 \\ 2 & 其他 \end{cases}$$

即以 $1,2,2,\cdots,2,3,2,2,\cdots,2$ 的 100 項為週期的數列；不難檢驗此數列中任意連續若干項之和都不等於 100，故所求 $f(A)$ 的最小值等於 3。