九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="5">題目：
設 m,n 都是大於 1 的正整數，試證：$\dfrac{1}{\sqrt[n]{m}}+\dfrac{1}{\sqrt[m]{n}}>1$。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="4">■ 自 編　　□ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類　　別</td><td colspan="4">■ 代 數　　□ 數 論　　□ 組 合　　□ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難　　■ 中等　　□ 易</td><td>編　號</td><td colspan="2">獨立研究(一)第一題</td></tr>
<tr><td colspan="5">參考解答：
令 $\sqrt[n]{m}=1+a,\sqrt[m]{n}=1+b$，其中 $a,b>0$，則
$$m=(1+a)^n>1+na，$$
$$n=(1+b)^m>1+mb。$$
於是，
$$a<\frac{m-1}{n}\quad 且\quad b<\frac{n-1}{m}。$$
因此，
$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}>\frac{1}{1+\frac{m-1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{n-1}{m}}=\frac{n+m}{n+m-1}>1。$$

【另解】利用算幾不等式 $\dfrac{(n-1)+m}{n}=\dfrac{1+1+\cdots+1+m}{n}>\sqrt[n]{m}$，故
$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}}>\frac{n}{n+m-1}。$$
同理，由 $\dfrac{(m-1)+n}{m}=\dfrac{1+1+\cdots+1+n}{m}>\sqrt[m]{n}$，可得
$$\frac{1}{\sqrt[m]{n}}>\frac{m}{n+m-1}。$$
因此，
$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}=\frac{n}{n+m-1}+\frac{m}{n+m-1}=\frac{n+m}{n+m-1}>1。$$
</td></tr>
</table>

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：試求最大的正整數 n，使得對於任意質數 p，其中 $2 \le p < n$， $n+6p$ 也是質數。				
試題來源	■ 自 編 □ 改編於：			
類 別	□ 代 數 ■ 數 論 □ 組 合 □ 幾 何			
難 易 度	■ 難 □ 中等 □ 易	**編 號**	獨立研究(一)第二題	

參考解答：

首先，可以觀察出正整數 n 必為質數；否則，取質數 p 為 n 的一個質因數時， $n+6p$ 就不是質數，矛盾！

其次，檢驗 $n=11$ 滿足所求條件：當 $p=2,3,5,7$ 時， $n+6p$ 都是質數。

$$11+6\cdot 2=23$$
$$11+6\cdot 3=29$$
$$11+6\cdot 5=41$$
$$11+6\cdot 7=53$$

當 $n=13$ 時：取 $p=2$ ，則 $n+6p=25$ 不是質數。
當 $n=17$ 時：取 $p=3$ ，則 $n+6p=35$ 不是質數。
當 $n=19$ 時：取 $p=11$ ，則 $n+6p=85$ 不是質數。

以下證明：當 $n \ge 20$ 時，都可以選取適當的質數 p ，使得 $n+6p$ 不是質數。
由於

$6\cdot 2\equiv 2 \pmod 5$　$6\cdot 3\equiv 3 \pmod 5$　$6\cdot 5\equiv 0 \pmod 5$　$6\cdot 7\equiv 2 \pmod 5$
$6\cdot 11\equiv 1 \pmod 5$　$6\cdot 13\equiv 3 \pmod 5$　$6\cdot 17\equiv 2 \pmod 5$　$6\cdot 19\equiv 4 \pmod 5$

於是， $6p$ 除以 5 的餘數可以是 $0,1,2,3,4$ ，因此，當 $n \ge 20$ 時，都可以選取適當的質數 p ，使得 $n+6p$ 是 5 的倍數，當然不是質數。

因此，所求最大的正整數 $n=11$ 。

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：	一童子軍團隊在一個三角形 ABC 的營地中某處 O，垂直立起團隊的旗杆，並由旗杆頂端 P 分別往 ΔABC 三邊最短距離處 D,E,F 各拉一條繩子，以固定旗杆，如圖所示。已知 $\overline{PD},\overline{PE},\overline{PF}$ 成等比數列，而 $\angle PDO,\angle PEO,\angle PFO$ 成等差數列，且都是銳角。若童子軍隊長猜測 $\angle PDO=\angle PEO=\angle PFO$ 一定成立，試問他的猜測是否正確？

試題來源	■ 自 編　　□ 改編於：		
類　　別	□ 代 數　□ 數 論　□ 組 合　■ 幾 何		
難 易 度	□ 難　■ 中等　□ 易	**編　號**	獨立研究(一)第三題

參考解答：

令 $\angle PDO=\alpha_1$, $\angle PEO=\alpha_2$, $\angle PFO=\alpha_3$，且 $\overline{PD}=h_1$, $\overline{PE}=h_2$, $\overline{PF}=h_3$。

由題意可知 $\overline{OP}=h_1\sin\alpha_1=h_2\sin\alpha_2=h_3\sin\alpha_3$。又已知 $h_2^2=h_1h_3$, $\alpha_2=\dfrac{\alpha_1+\alpha_3}{2}$，則可得 $\sin\alpha_1\sin\alpha_3=\sin^2\left(\dfrac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\right)$。利用倍角公式，可將上式化成

$$\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha_1-\alpha_3)-\cos(\alpha_1+\alpha_3)\right]=\frac{1}{2}\left[1-\cos(\alpha_1+\alpha_3)\right],$$

整理後得到 $\cos(\alpha_1-\alpha_3)=1$。因 $0<\alpha_1<\pi/2, 0<\alpha_3<\pi/2 \Rightarrow -\pi/2<\alpha_1-\alpha_3<\pi/2$，故有 $\alpha_1-\alpha_3=0$。據此可得 $\alpha_2=\dfrac{\alpha_1+\alpha_3}{2}=\alpha_1$，故 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$，即童軍隊長的猜測正確。