

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

獨立研究試題（一）

注意事項：

- (1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號
 - (2) 時間：2 小時（8:10~10:10）
 - (3) 配分：每題皆為 7 分
 - (4) 不可使用計算器
 - (5) 請將答案寫在答案卷內
-

一、設 m, n 都是大於 1 的正整數，試證： $\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1$ 。

二、試求最大的正整數 n ，使得對於任意質數 p ，其中 $2 \leq p < n$ ， $n+6p$ 也是質數。

三、一童子軍團隊在一個三角形 ABC 的營地中某處 O ，垂直立起團隊的旗杆，並由旗杆頂端 P 分別往 $\triangle ABC$ 三邊最短距離處 D, E, F 各拉一條繩子，以固定旗杆，如圖所示。已知 $\overline{PD}, \overline{PE}, \overline{PF}$ 成等比數列，而 $\angle PDO, \angle PEO, \angle PFO$ 成等差數列，且都是銳角。若童子軍隊長猜測 $\angle PDO = \angle PEO = \angle PFO$ 一定成立，試問他的猜測是否正確？

