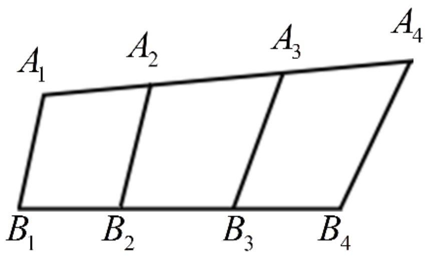
九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 如下圖所示，$\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}$, $\overline{B_1B_2}=\overline{B_2B_3}=\overline{B_3B_4}$。試證：

四邊形 $A_1B_1B_2A_2$、$A_2B_2B_3A_3$、$A_3B_3B_4A_4$ 的面積成等差數列。



試題來源	■ 自 編		□ 改編於：					
類　　別	□ 代 數		□ 數 論		□ 組 合		■ 幾 何	
難 易 度	□ 難	□ 中等	■ 易		**編　號**		口試第一題	

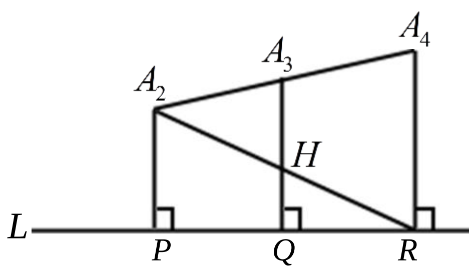
參考解答：

連接 A_2B_1, A_3B_2, A_4B_3，只要證明 $\Delta B_1A_2B_2, \Delta B_2A_3B_3, \Delta B_3A_4B_4$ 的面積成等差，同理可證 $\Delta A_1B_1A_2, \Delta A_2B_2A_3, \Delta A_3B_3A_4$ 的面積亦成等差，即可證得原題之要求。

因為 $\overline{B_1B_2}=\overline{B_2B_3}=\overline{B_3B_4}$，所以只要證明由 A_2, A_3, A_4 分別對 B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 所作的高成等差即可！

如下圖所示，分別由 A_2, A_3, A_4 分別對 B_1,B_2,B_3,B_4 所在的直線 L 作垂線，設垂足分別為 P,Q,R。因為 $A_2P//A_3Q//A_4R$，且 $\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}$，所以 $\overline{PQ}=\overline{QR}$。

設 $\overline{A_2R}$ 交 $\overline{A_3Q}$ 於 H，則 $\overline{A_3H}=\dfrac{1}{2}\overline{A_4R}$, $\overline{QH}=\dfrac{1}{2}\overline{A_2P}$，故 $\overline{A_3Q}=\dfrac{1}{2}(\overline{A_4R}+\overline{A_2P})$，即 $\overline{A_2P}, \overline{A_3Q}, \overline{A_4R}$ 成等差，故得證！



九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 考慮 $1,2,3,\cdots,n$ 的任意排列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，令 $f(n)$ 表示 n 層絕對值 $\left|\left|\left|\left|a_1\right|-a_2\right|-a_3\right|-\cdots\left|-a_n\right|\right.$ 的最大值，例如：當 $n=3$ 時，$f(3)$ 表示 $\left|\left|\left|a_1\right|-a_2\right|-a_3\right|$ 的最大值，其中 a_1,a_2,a_3 為 $1,2,3$ 的任意排列。試求 $f(97)$ 之值。

試題來源	□ 自 編　■ 改編於：NSC86-2511-S-003-038		
類　別	□ 代 數　□ 數 論　■ 組 合　□ 幾 何		
難 易 度	□ 難　■ 中等　□ 易	**編　號**	口試第二題

參考解答：

首先，證明：每一正整數 n，$f(n)\le n$。

事實上，利用不等式：$|a-b|\le\max\{a,b\}$ 對任意兩正數 a,b 都成立，可得

$$f(n)\le\max\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}=n 。$$

於是，$f(97)\le 97$。

另一方面，可以構造出 $1,2,3,\cdots,97$ 的一組排列，使其 97 層絕對值為 97，例如：取

$$96,95,94,93;92,91,90,89;\cdots;4,3,2,1;97，$$

利用 $\left|\left|\left|\left|(a+3)\right|-(a+2)\right|-(a+1)\right|-a\right|=0$ 對任意正數 a 恆成立，可得到它們的 97 層絕對值為 97。因此，可推得 $f(97)=97$。

至於 $f(98)$ 之值，我們可以利用：對任意整數 a,b，$|a-b|$ 與 $a+b$ 之奇偶性必相同；於是，$f(n)$ 與 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 有相同的奇偶性。特別的，

$$1+2+3+\cdots+98\equiv 1 \pmod 2 。$$

故 $f(98)<98$，即 $f(98)\le 97$。以下可以構造出 $1,2,3,\cdots,98$ 的一組排列，使其 98 層絕對值為 97，例如：取 $97,96,95,94;93,92,91,90;\cdots;5,4,3,2;1;98$。因此，可以得知 $f(98)=97$。