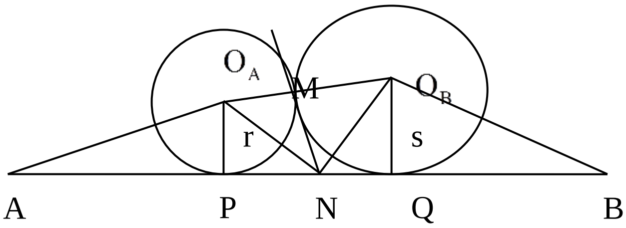
九十六學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（二）【參考解答】

一、【參考解答】



如右圖，MN 為 S_A, S_B 的內公切線，

O_A, O_B 分別為這兩圓的圓心，P,Q 為垂

足。因此 $PN = MN = NQ$，又因 $\Delta O_A N O_B$ 為直角三角形，

可知 $MN^2 = rs$。因此

$AB = r\cot\frac{\alpha}{2} + s\cot\frac{\beta}{2} + 2\sqrt{rs}$，同理可得其餘兩邊 AC、BC 的表示式。由正弦定理可知

$AC\sin\alpha = BC\sin\beta$，於是

$$\left(r\cot\frac{\alpha}{2} + t\cot\frac{\gamma}{2} + 2\sqrt{rt}\right)\sin\alpha = \left(s\cot\frac{\beta}{2} + t\cot\frac{\gamma}{2} + 2\sqrt{st}\right)\sin\beta \text{。(*)}$$

$$\left(r\cot\frac{\alpha}{2} + t\cot\frac{\gamma}{2} + 2\sqrt{rt}\right)\sin\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}r + 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{t}\sqrt{r} + t\cot\frac{\gamma}{2}\sin\alpha$$

$$= 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\left[\sqrt{r} + \sqrt{t}\tan\frac{\alpha}{2}\right]^2 + t\left[\cot\frac{\gamma}{2}\sin\alpha - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right] \text{。}$$

同理 $\left(s\cot\frac{\beta}{2} + t\cot\frac{\gamma}{2} + 2\sqrt{st}\right)\sin\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2}\left[\sqrt{s} + \sqrt{t}\tan\frac{\beta}{2}\right]^2 + t\left[\cot\frac{\gamma}{2}\sin\beta - 2\sin^2\frac{\beta}{2}\right]$。

$$\cot\frac{\gamma}{2}(\sin\alpha - \sin\beta) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\sin\alpha - \sin\beta) = \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\beta - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\beta}{2}$$

因此 $\cos\frac{\alpha}{2}\left[\sqrt{r} + \sqrt{t}\tan\frac{\alpha}{2}\right] = \cos\frac{\beta}{2}\left[\sqrt{s} + \sqrt{t}\tan\frac{\beta}{2}\right]$。

二、【參考解答】

$k = 0, 4, 7$

令 $\frac{a^2 + ab + b^2}{ab - 1} = k$，$\because k$ 為正整數

(1)若 $a=b$ ，$k=3+\dfrac{3}{a^2-1}$

$\because k$ 為正整數 $\Rightarrow a=0$ 或 $a=2$ $\Rightarrow k=0$ 或 $k=4$

(2)若 $b=0 \Rightarrow k=-a^2$ $\Rightarrow a=0$ 且 $k=0$

(3)若 $a>b>0$ ，$\because \dfrac{a^2+ab+b^2}{ab-1}=k$ $\Rightarrow a^2-(k-1)ab+b^2+k=0$

若 (a,b) 為一組解且 $b>(k-1)b-a>0$ ，則 $(b,(k-1)b-a)$ 也是一組解

$(k-1)b-a>$ 必成立因其滿足下列不等式：

$k>\dfrac{a+b}{b},\dfrac{a^2+ab+b^2}{ab-1}>\dfrac{a+b}{b},b^3>-a-b$

同理，當 $b>1$ 時，$b>(k-1)b-a$ 與

$k<\dfrac{2b+a}{b},\dfrac{a^2+ab+b^2}{ab-1}<\dfrac{2b+a}{b},a>b+\dfrac{3b}{b^2-1}$ 等價。

若 $3b<b^2-1$，也就是 $b\ge 4$ 時，之前的不等式為真，因此對於所有的數對 (a,b) ，

$a>b\ge 4$ ，我們可找到一組解 (b,c) ，其中 $b>c>0$。

當 $b=1$，我們得到 $k=a+2-\dfrac{3}{a-1}$ ，$a=4$ 或 $a=2$ ，$k=7$。

當 $b=2$ ，我們得到 $4k=2a+5+\dfrac{21}{2a-1}$ ，$a=4$ 或 $a=11$ ，$k=4$ 或 $k=7$。

當 $b=3$ ，我們得到 $9k=3a+10+\dfrac{91}{3a-1}$ 無法得到任何解。

因此，$k\in\{0,4,7\}$

三、【參考解答】

n 為偶數。

我們先證明滿足條件 n 必為偶數。顯然 $a_1>1$ ，將 $S:=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 分成兩集合：

$A:=\{i\in S\,|\,a_i-i\ge 0\}$ 與 $B:=\{i\in S\,|\,a_i-i<0\}$。因當 $i\in A$ 時有 $a_i-i=a_1-1$；當 $j\in B$ 時

有 $a_j-j=1-a_1$ ；故有

$$\sum_{i\in A}(a_i-i)+\sum_{j\in B}(a_j-j)=|A|(a_1-1)-|B|(a_1-1)=\left(|A|-|B|\right)(a_1-1).$$

另一方面

$$\sum_{i\in A}(a_i-i)+\sum_{j\in B}(a_j-j)=\sum_{k\in S}a_k-\sum_{k\in S}k.$$

因此$\left(|A|-|B|\right)(a_1-1)=0$，即$|A|=|B|$。故$n=|S|$必為偶數。

我們再證明有偶數n皆滿足條件。令$n=2k$，構造以下排列

$$2,\ 1,\ 4,\ 3,\ \cdots,\ 2k,\ 2k-1$$

滿足所求。