

# 九十六學年度全國高中數學科能力競賽決賽

## 筆試試題 ( 二 )

注意事項：

(1)時間分配：2 小時 ( 16:00 ~ 18:00 )。

(2)配分：每題皆為 7 分。

(3)不可使用計算器。

---

一、 設  $\triangle ABC$  內有三個兩兩相外切的圓  $S_A, S_B, S_C$ ，且  $S_A$  與  $AB, AC$  相切，  
 $S_B$  與  $AB, BC$  相切， $S_C$  與  $BC, AC$  相切，設它們的半徑分別為  $r, s, t$ 。

令  $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$ ，試證：

$$\sqrt{r} \cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt{t} \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{s} \cos \frac{\beta}{2} + \sqrt{t} \sin \frac{\beta}{2}。$$

二、 設  $a, b$  為非負整數， $ab \neq 1$ ，且  $k = \frac{a^2 + ab + b^2}{ab - 1}$  為非負整數。求所有可能的  $k$  值。

三、 求出所有可能的正整數  $n$ ，使得存在一個  $1, 2, \dots, n$  的排列  $a_1, \dots, a_n$ ，滿足下列條件： $|a_1 - 1| = |a_2 - 2| = \dots = |a_n - n| \neq 0$ 。