

九十六學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題 (一)

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時 (13:30 ~ 15:30)。
- (2) 配分：每題皆為 7 分。
- (3) 不可使用計算器。

一、在銳角 $\triangle ABC$ 中，設 D, E 分別為 $\overline{CA}, \overline{AB}$ 的中點， H 為垂心， M 為 \overline{CH} 的中點， \overline{CH} 交 \overline{AB} 於 F ，試證 D, E, F, M 四點共圓。

二、設 x_1, \dots, x_n 為 n 個正實數。

證明：
$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_1 + x_2} + \dots + \frac{n}{x_1 + \dots + x_n} < 2\left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)。$$

三、設 n 為大於 2 的正整數，試證明：可以找到 n 個相異的正整數

a_1, a_2, \dots, a_n ，使得任取其中 $n-1$ 個數，它們的和皆為平方數。