九十六學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究試題（二）【參考解答】

一、【參考解答】

利用柯西不等式

$$(\sin\theta+\tan\theta+\sec\theta)(\cos\theta+\cot\theta+\csc\theta)$$

$$=(\sin\theta+\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta)(\cos\theta+\frac{1}{\sin\theta}+\cot\theta)$$

$$\geq\left[(\sin\theta+\frac{1}{\cos\theta})^{\frac{1}{2}}(\cos\theta+\frac{1}{\sin\theta})^{\frac{1}{2}}+(\tan\theta\cot\theta)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$=\left[(\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}+2)^{\frac{1}{2}}+1\right]^2 \text{…………①}$$

其中

$$\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\sin2\theta+\frac{2}{\sin2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{2}{t} \text{…………②}$$

這裡 $t=\sin2\theta$，因為 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，因而 $0<2\theta<\pi$，因此 $0<t\leq1$。若令 $g(t)=\frac{1}{2}t+\frac{2}{t}$，

$0<t\leq1$，可以證明 $g(t)$ 是遞減函數，事實上，若 $0<x<y\leq1$，則

$$g(x)-g(y)=(\frac{1}{2}x+\frac{2}{x})-(\frac{1}{2}y+\frac{2}{y})$$

$$=\frac{1}{2}(x-y)+\frac{2}{xy}(y-x)$$

$$=(x-y)(\frac{1}{2}-\frac{2}{xy})$$

$$=(x-y)(\frac{xy-4}{2xy})$$

>0 （$\because$ $x-y<0$ 且 $xy-4<0$）

所以， $g(t)\ge g(1)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

請注意：$t=1$時，即$\sin 2\theta=1$，得$\theta=\frac{\pi}{4}$，此時，$\sin\theta=\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\theta=\cot\theta=1$，

$\sec\theta=\csc\theta=\sqrt{2}$，因此①式的等號是成立的。故由①, ②可得

$$(\sin\theta+\tan\theta+\sec\theta)(\ldots$$

$$\ge\left[(\frac{5}{2}+2)^{\frac{1}{2}}+1\right]^2$$

$$=(\frac{3}{\sqrt{2}}+1)^2$$

等號成立於$\theta=\frac{\pi}{4}$，即最小值為$(\frac{3}{\sqrt{2}}+1)^2$。

二、【參考解答】

這是拉貴爾（Laguerre）定理的特例，參考 Proofs from THE BOOK, P. 101。證明如

下：

令三實數根為 p, q, r，由根與係數的關係，得

$$a_2 = p+q+r$$
$$a_1 = pq+qr+rp,$$

利用此兩式子，得

$$a_2^2-2a_1-p^2=q^2+r^2\ge\frac{(q+r)^2}{2}=\frac{(a_2-p)^2}{2}.$$

整理得到

$$3p^2-2a_2p+(4a_1-a_2^2)\le 0$$

也就是說，p 介於二次方程式

$$3x^2-2a_2x+(4a_1-a_2^2)=0$$

的兩實數根之間，而此二實數根恰為

$$\frac{a_2}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{a_2^2-3a_1},\quad \frac{a_2}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{a_2^2-3a_1},$$

故得證。

三、【參考解答】

共 12 個，分別為

$$\pm(x^2-1)(x\pm 1),\ \pm(x^2\pm x-1),\ \pm(x\pm 1).$$

不妨設首項係數為 1，所求多項式設為 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，根為 $x_1,\ \cdots,\ x_n$。

由根與係數關係知

$$x_1^2+\cdots+x_n^2=(x_1+\cdots+x_n)^2-2(x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n),$$

故 $a_1^2-2a_2\geq 0$，又 $a_1,\ a_2\in\{1,\ -1\}$，故 $a_1^2=1,\ a_2=-1$。因此

$$x_1^2+\cdots+x_n^2=3.$$

再用算幾不等式，

$$\frac{3}{n}=\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}\geq\sqrt[n]{(|x_n|\cdots|x_n|)^2}=\sqrt[n]{|a_n|^2}=1$$

因此

$$n\leq 3.$$

底下就 n 逐個討論即可。

$n=3$ 時，可得 $\pm(x^2-1)(x\pm 1)$,

$n=2$ 時，可得 $\pm(x^2\pm 1)$,

$n=1$ 時，可得 $\pm(x\pm 1)$.