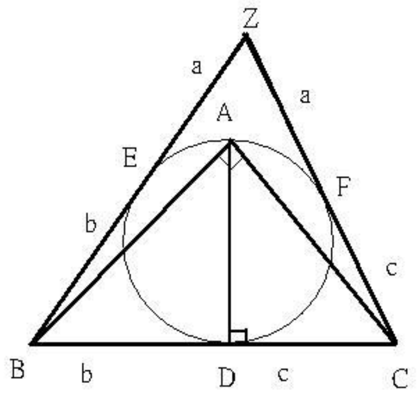
九十六學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究試題（一）【參考解答】

一、【參考解答】



令 $\overline{ZE}=\overline{ZF}=a, \overline{BD}=\overline{BE}=b, \overline{CD}=\overline{CF}=c$

令 $s=\dfrac{\overline{ZB}+\overline{BC}+\overline{ZC}}{2}(=a+b+c)$

已知 $\overline{ZB}+\overline{ZC}=2a+b+c=10$ ------(1)

設圓的半徑為 r, $\because$ 此圓為 ΔZBC 的內切圓

$\therefore \Delta ZBC$ 面積 $=rs$ ------(2)

又由海龍公式得知

$\therefore \Delta ZBC$ 面積 $=\sqrt{s(s-a-b)(s-b-c)(s-a-c)}=\sqrt{s\cdot c\cdot a\cdot b}$ -------(3)

ΔABC 中 $\because \angle BAC=90^\circ$ 且 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ $\therefore \overline{AD}^2=\overline{BD}\cdot\overline{CD}$

$\therefore (2r)^2=bc$ ---------(4)

由(2) $(\Delta ZBC面積)^2=r^2s^2$ 由（3）及（4）

$\therefore s \cdot c \cdot a \cdot b = \frac{1}{4} bc \cdot s^2 \qquad \therefore s = 4a \qquad \therefore a+b+c=4a$

$\therefore b+c=3a$　　代入（1）　$\therefore a=2$

$\therefore b+c=6 \qquad \therefore \overline{BC}=6$

二、【參考解答】

設 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n (n=1005)$

則至少有 $\underbrace{\frac{x_1+x_2}{2} < \frac{x_1+x_3}{2} < \cdots < \frac{x_1+x_n}{2}}_{(n-1\text{個中點}} < \underbrace{\frac{x_2+x_n}{2} < \frac{x_3+x_n}{2} < \cdots < \frac{x_{n-1}+x_n}{2}}_{(n-2\text{個中點}}$

共 $(2n-3)$ 個中點。

於 $x_2-x_1=x_3-x_2=\cdots=x_n-x_{n-1}$ 時，這些中點數 $2n-3$ 就是所有的中點，

故知至少有 $2n-3$ 個紅點。

（ $2n-3=2\times1005-3=2007$ ）

三、【參考解答】

(1) 首先，$f(1)\neq1$。假設 $f(1)=1$ 則 $f(f(1))=1$。另一方面，由(ii)得 $f(f(1))=3$。 矛盾。

其次，$f(1)<3$，假設 $f(1)\geq3$ 則由(i)得 $f(f(1))\geq f(3)>3$ 此與(ii) $f(f(1))=3$ 矛盾。所以，$f(1)=2$。

(2) 由 $f(f(n))=3n$ 得

$f(3n)=f(f(f(n))).$

故 $f(3^n)=3f(3^{n-1})=3^2 f(3^{n-2})=\cdots=3^n f(1)=2\times 3^n$ 。所以，

$$f(\ 2\times\ {}^{n}\ 3\ 3\ f\ )\ {}^{n}=\ (\times 3\ -)^{n}\times\ \ 3=\ {}^{n}.$$

而 $2\times 3^n-3^n=3^n$ ，且 $f(n+1)\geq f(n)+1$ （ 根據(i) ）。所以，

$$f(\ {}^{n}3+\ell\ =)f\ \ {}^{n}+(\ell\ 3\ 3\ \times)\ \ +\ell^{n}\ \ell 2=\ \ 3\ \cdots\ ,\ .$$

(3) $f(2\times 3^n+\ell)=f(f(3^n+\ell))=3\times(3^n+\ell)=3^{n+1}+3\ell$ 。故

$$f(2008)=f(2\times 3^6+550)=3^7+3\times 550=3837.$$