

# 九十六學年度高級中學數學科能力競賽決賽

## 獨立研究試題 (一)

注意事項：

- (1) 三題中僅可以選兩題作答，並請註明題號。
- (2) 時間分配：2 小時 ( 8:10~10:10 )。
- (3) 配分：每題皆為 7 分。
- (4) 不可使用計算器。

---

一、 設  $\triangle ABC$  為直角三角形，且  $\angle BAC = 90^\circ$ ， $D$  為  $\overline{BC}$  上一點，使得  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 。  
以  $\overline{AD}$  為直徑作圓，過  $B, C$  兩點分別作此圓的切線（不同於  $\overline{BC}$ ）交於  $Z$  點。已知  $\overline{ZB} + \overline{ZC} = 10$ ，求  $\overline{BC}$ 。

二、 數線上有 1005 個點，這 1005 個點中任意兩點的中點用紅點標出，試問至少有多少個紅點。

三、 令  $f$  是由自然數映至自然數的函數且滿足

(i) 對任意自然數  $n$ ,  $f(n) < f(n+1)$ ,

(ii) 對任意自然數  $n$ ,  $f(f(n)) = 3n$ .

試求  $f(2008)$  之值。