九十五學年度全國高中數學科能力競賽決賽

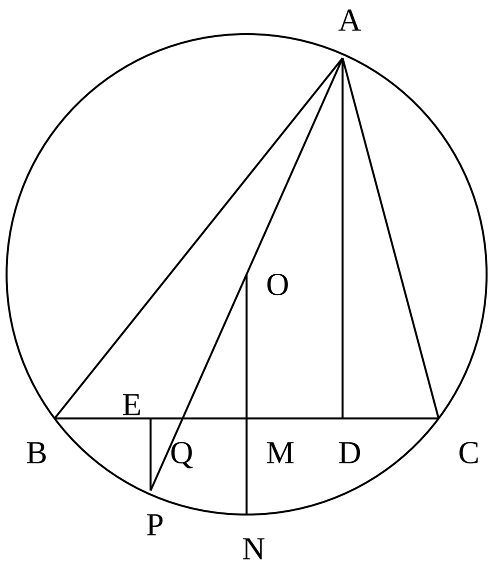
筆試試題（二）【參考解答】

一、【解】設點 D, E 分別為點 A, P 到 BC 邊的垂足，則 $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QP}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{PE}}$。令 M, N 分別為邊 BC 與劣弧 BC 的中點，則 $\overline{PE}\le\overline{NM}$。設 R 為 ΔABC 的外接圓半徑，則

$$\overline{AD}=2R\sin 45°\sin 75°=2R\sin 45°\sqrt{\frac{1-\cos 120°}{2}}=2R\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)R\text{ 。}$$

因 $\angle A=60°$，$\angle BNC=120°$，$\angle NBM=30°$，$\angle BNO=60°$，故 ΔOBN 為正三角形，從而得 $\angle OBM=30°$。因此 $\overline{MN}=\overline{ON}-\overline{OM}=R-R\sin 30°=\dfrac{R}{2}$。故

$\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QP}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{PE}}\ge\dfrac{\overline{AD}}{\overline{NM}}=\sqrt{3}+1$；當 P 為劣弧 BC 的中點有最小值 $\sqrt{3}+1$。



二、【解】先証明：給定 k，$1\le a_k\le n$ 及 $1\le b_k\le n$ 不能同時成立。如果同時成立，即

$1\le a_k\le b_k\le n$ 時，根據次序 $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n$ 及 $b_1<b_2<b_3<\cdots<b_n$，得

$$n\ge a_k>a_{k+1}>\cdots>a_n\ge 1$$

及

$$n\ge b_k>b_{k-1}>\cdots>b_1\ge \text{。}$$

因此 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 及 $a_k,a_{k+1},\cdots,a_n$ 共 $n+1$ 個相異整數落在 1 與 n 之間，矛盾！

同理可證得 $n+1\le a_k\le 2n$ 及 $n+1\le b_k\le 2n$ 不能同時成立。因此 a_k 與 b_k 只能滿足

$$1\le a_k\le n<b_k\le 2n$$

或

$$1\le b_k\le n<a_k\le 2n \text{ 。}$$

因此絕對值的和

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|$$

可改寫為較大的 n 個數 $n+1,\ n+2,\cdots,\ 2n$ 減去較小的 n 個數 $1,\ 2,\cdots,\ n$，即

$$\big((n+1)+(n+2)+\cdots+(2n)\big)-(1+2+\cdots+n)=n+n+\cdots+n=n^2 \text{ 。}$$

三、【解】由柯西不等式

$$(a+b+c)^2\le\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+9bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+9ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+9ab}}\right)\left(a\sqrt{a^2+9bc}+b\sqrt{b^2+9ca}+c\sqrt{c^2+9ab}\right) \text{，}$$

又

$$a\sqrt{a^2+9bc}+b\sqrt{b^2+9ca}+c\sqrt{c^2+9ab}\le(a+b+c)^{1/2}(a(a^2+9bc)+b(b^2+9ca)+c(c^2+9ab))^{1/2}$$
$$\le(a+b+c)^{1/2}(a^3+b^3+c^3+27abc)^{1/2}$$

故

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+9bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+9ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+9ab}}\ge\frac{(a+b+c)^{3/2}}{(a^3+b^3+c^3+27abc)^{1/2}} \text{ 。}$$

因此，我們只需再証明：$\dfrac{(a+b+c)^{3/2}}{(a^3+b^3+c^3+27abc)^{1/2}}\ge\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ 。此式等價於

$$10(a+b+c)^3\ge 9(a^3+b^3+c^3+27abc) \text{ 。}$$

由於

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+(3a^2b+3b^2c+3c^2a)+(3ab^2+3bc^2+3ca^2)+6abc$$
$$\ge a^3+b^3+c^3+9abc+9abc+6abc=a^3+b^3+c^3+24abc \text{,}$$

故

$$10(a+b+c)^3\ge 10(a^3+b^3+c^3+24abc)\ge 9(a^3+b^3+c^3+27abc) \text{ 。}$$

等號成立的充要條件為 $a=b=c$ 。