

九十五學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時 (13:30 ~ 15:30)。
 - (2) 配分：每題皆為 7 分。
 - (3) 不可使用計算器。
-

一、試求所有使得 $\sqrt{\frac{2006}{x+y}} + \sqrt{\frac{2006}{x+z}} + \sqrt{\frac{2006}{y+z}}$ 為整數的正整數組 (x, y, z) 。

二、設 $p(x)$ 為整係數多項式。給定整數 a, b ，令

$$a_1 = p(a), a_2 = p(a_1), \dots, a_{2006} = p(a_{2005}) ;$$

$$b_1 = p(b), b_2 = p(b_1), \dots, b_{2006} = p(b_{2005}) 。$$

已知 $a_{2006} = a$ ， $b_{2006} = b$ ，但 $a_{1003} \neq a$ ， $b_{1003} \neq b$ 。

試證明：若 $a < b$ ，則 $a_{1003} > b_{1003}$ 。

三、設 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，分別在 \overline{BC} 、 \overline{AC} 、 \overline{AB} 三邊上各取 D、E、F 三點。試證明存在唯一的一組 D、E、F 使得 $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ 、 $\triangle BDF \sim \triangle BAC$ 、 $\triangle CDE \sim \triangle CAB$ ，並找出這樣的 D、E、F 三點的位置。