

九十五學年度全國高中數學科能力競賽決賽

獨立研究試題（二）

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時 (10:20~12:20)。
 - (2) 配分：每題皆為 7 分。
 - (3) 不可使用計算器。
-

一、試證：對於所有正整數 $n \geq 2$ ，不等式

$$\sum_{k=2}^n \left[\log_{\frac{3}{2}}(k^3 + 1) - \log_{\frac{3}{2}}(k^3 - 1) \right] < 1$$

恆成立。

二、設正方形 $ABCD$ 之邊長為 a ，試分別求此正方形所有內接正三角形中面積最大者和面積最小者的面積，並證明你的答案。

三、求最小正整數 k 使得存在一函數 $f: \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ (\mathbb{N} 為所有自然數所成的集合) 滿足以下條件：

當 $|i - j|$ 為 3, 8, 11 時恆有 $f(i) \neq f(j)$ 。