

九十五學年度全國高中數學科能力競賽決賽

口試試題【參考解答】

1、【解】(一) $(19^\circ \times 10 - 180^\circ) \times 2 - 19^\circ = 1^\circ$

(二) $(19^\circ - 60^\circ \div 2 \div 2) \div 2 \div 2 = 1^\circ$

注意：上面的每一運算步驟都可尺規作圖。

2、【證】利用反證法，假設介於 100 與 1008 之間的正整數 n 都讓分數 $\frac{n}{\pi(n)} \neq 5$ ，也

就是說，分數

$$\frac{100}{\pi(100)}, \frac{101}{\pi(101)}, \frac{102}{\pi(102)}, \dots, \frac{k}{\pi(k)}, \frac{k+1}{\pi(k+1)}, \dots, \frac{1008}{\pi(1008)}$$

不是小於 5，就是大於 5。令 $\frac{k+1}{\pi(k+1)}$ 是上述數列從左邊數來第一個大

於 5 的分數，即

$$\frac{k}{\pi(k)} < 5 < \frac{k+1}{\pi(k+1)}$$

推得 $k < 5\pi(k)$ 及 $5\pi(k+1) < k+1$ 。又因為 $5\pi(k) \leq 5\pi(k+1)$ ，所以

$$k < 5\pi(k) \leq 5\pi(k+1) < k+1 \Rightarrow \pi(k) < \frac{k+1}{5}$$

因為 $5\pi(k+1)$ 是正整數，又介於 k 及 $k+1$ 之間，不合。所以假設不成立，

即會有一個介於 100 與 1008 的整數 n 滿足

$$\frac{n}{\pi(n)} = 5.$$