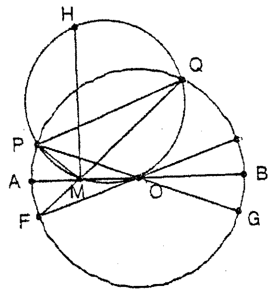
94學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試（二）【參考解答】

[問題一] 參考解答：



設線段$\overline{AB}$為圓O的直徑（包含O,M），本題只要證明

$\angle PMA=\angle QMB$。

延長線段$\overline{PO}$與$\overline{QM}$分別與圓O交於點G與點F。因

M,P,Q,O四點共圓，$\angle OPQ=\angle OMQ$。又

$\angle OPQ=\frac{1}{2}\widehat{Q}\widehat{G}=\frac{1}{2}\widehat{Q}\widehat{B}+\frac{1}{2}\widehat{B}\widehat{G}$,

$\angle OMQ=\frac{1}{2}(\widehat{Q}\widehat{B}+\widehat{A}\widehat{F})$，故$\widehat{B}\widehat{G}=\widehat{A}\widehat{F}$。因$\widehat{P}\widehat{A}=\widehat{B}\widehat{G}$，得

$\widehat{P}\widehat{A}=\widehat{A}\widehat{F}$，故$\angle PMA=\angle FMA$。對頂角$\angle FMA=\angle QMB$，

從而得$\angle PMA=\angle QMB$。

[問題二] 參考解答：

由已知條件可知 $xy=kz+a,\quad yz=lx+b,\quad zx=my+c$。

不失其一般性，可設$x\le y\le z$，則$ky<kz=xy-a<xy$，

故 $k\le x$。又因

$0\equiv k(zx-c)\equiv(kz)x-kc\equiv(xy-a)x-kc\equiv-(ax+kc)\pmod y$

可得，$y\mid ax+kc$。可令$ax+kc=ty$。於是可得，

$(a+c)x\ge ax+kc=ty\ge tx$。

因此，$t\le a+c$。 同樣的，

$0\equiv t(yz-b)\equiv(ty)z-tb\equiv(ax+kc)z-tb\equiv kcz-tb$

$\equiv c(xy-a)-tb\equiv-(ac+tb)\pmod x$

因此，$x\mid ac+tb$。於是，

$x\le ac+tb\le ac+(a+c)b=ab+bc+ca$

[問題三] 參考解答：

若每一項$a_k\le 1$，則不等式顯然成立。故不失其一般性可設$a_k>1$，$\forall k=1,2,\ldots,s$，

而$a_k\le 1$，　$\forall k=s+1,s+2,\cdots,n$。於是，

$$\prod_{k=1}^{95}\max\{1,a_k\}=\prod_{k=1}^{s}a_k=\prod_{k=1}^{s}(1+(a_k-1))\ge(1+\sum_{k=1}^{s}(a_k-1))=1+\sum_{k=1}^{s}a_k-s$$

$$=1+\sum_{k=1}^{95}a_k-\sum_{k=s+1}^{95}a_k-s\ge 1+\sum_{k=1}^{95}a_k-(95-s)-s=(1-95)+\sum_{k=1}^{95}a_k$$

因此 $\sum_{k=1}^{95}a_k\le 94+\prod_{k=1}^{95}\max\{1,a_k\}$