

94 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究(二) 試題

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時。
- (2) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (3) 不可使用電算器。
- (4) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：94 個保險箱，94 把鑰匙。每把鑰匙恰好能開一個保險箱，每個保險箱也只會有一把鑰匙能開。現在主人隨機地在每個保險箱裡面放一把鑰匙，把其中的 92 個保險箱鎖上，而保留兩個保險箱開著(這個動作也是隨機的)，試求用這兩個保險箱的鑰匙，能打開其餘的 92 個保險箱的機率是多少？
(附註：保險箱一旦被打開，鎖在裡面的鑰匙就可用來試著打開其他的保險箱)

【問題二】：假定 $0 \leq x \leq 5$ ，試求滿足 $[x^2 - 2x] = [x]^2 - 2[x]$ 的一切實數 x ，其中 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數。

【問題三】：若正整數 p, q, r 使得二次方程式 $px^2 - qx + r = 0$ 在開區間 $(0, 1)$ 內有兩個不同的實根，試求 p 的最小值。