94學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（一）【參考解答】

[問題一] 參考解答：

$\because x^2-xy+y^2=\frac{1}{4}[(x+y)^2+3(x-y)^2]$. 若令$p=x+y$, $q=x-y$, 則

原方程式可化為$28p=3(p^2+3q^2)$. 由此可知$p>0$且p是3的倍數.

設$p=3k$, 其中$k\in N$, 則$28k=3(3k^2+q^2)$. 於是又可得$k>0$且k是

3的倍數. 設$k=3m$, $m\in N$, 則$28m=27m^2+q^2$, 因此$28m-27m^2=q^2\geq 0$.

由此可知$m=1$. 所以此時$k=3$, $p=9$, $q=\pm1$. 故可由方程組

$\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=\pm1 \end{cases}$ 得到原方程式的解$(x,y)=(5,4)$或$(4,5)$

[問題二]參考解答：

如圖所示, 連接$\overline{OA}$, $\overline{OC}$, $\overline{O'C}$, 在$\Delta OCO'$中, $\angle OCO'=120°$. 所以

$6\overline{OO'}^2=6(\overline{CO}^2+\overline{CO'}^2-2\overline{CO}\cdot\overline{CO'}\cos 120°)=6(\overline{CO}^2+\overline{CO'}^2+\overline{CO}\cdot\overline{CO'})$

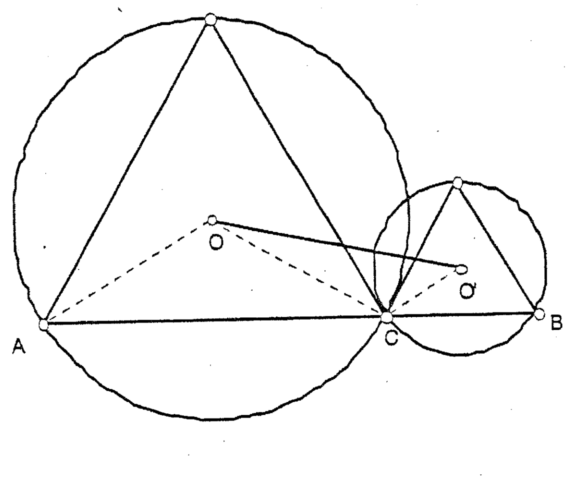
因 $\overline{CO}=\frac{\overline{AC}}{\sqrt{3}}$, $\overline{CO'}=\frac{\overline{BC}}{\sqrt{3}}$, 所以 $6\overline{CO}^2=2\overline{AC}^2$, $6\overline{CO'}^2=2\overline{BC}^2$

因而, $6\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CO'}=2\overline{AC}\cdot\overline{BC}=(\overline{AC}+\overline{BC})^2-\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$.

由此可得

$6\overline{OO'}^2=2\overline{AC}^2+2\overline{BC}^2+(\overline{AB}^2-\overline{AC}^2-\overline{BC}^2)=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

所以 $6\overline{OO'}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=49+25+4=78$. 故, $\overline{OO'}=\sqrt{13}$



[問題三] 參考解答：

$$f(a)+f(b)=a^3-6a^2+17a+b^3-6b^2+17b$$
$$=(a^3+b^3)-6(a^2+b^2)+17(a+b)$$
$$=[(a+b)^3-3(a+b)ab]-6[(a+b)^2-2ab]+17(a+b)$$
$$=[(a+b)^3-6(a+b)^2+17(a+b)]-3ab[(a+b)-4]$$

故 $[(a+b)^3-6(a+b)^2+17(a+b)-36]-3ab[(a+b)-4]=0$

$\Rightarrow$ $[(a+b)-4][(a+b)^2-2(a+b)+9-3ab]=0$

因 $(a+b)^2-2(a+b)+9-3ab=a^2+b^2-ab-2(a+b)+9$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-2)^2+(b-2)^2+10]>0$$

得 $a+b=4$.