九十三學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試（二）【參考解答】

[問題一] 參考解答：

由題意可知

$$n^2-m^2=2pq \qquad (1)$$

$$q^2-p^2=2mn \qquad (2)$$

由(1)可知m和n的奇偶性相同..若m和n都是奇數，令$m=2m_1+1, n=2n_1+1$

其中m_1和n_1為整數.代回(1)可得$4(n_1^2+n_1-m_1^2-m_1)=2pq$.

由(2)可知p和q的奇偶性相同..因此p和q都是偶數，令$p=2p_1, q=2q_1$

代回(2)可得$4(q_1^2-p_1^2)=2mn$..這與m和n都是奇數矛盾，因此m和n皆為偶數.

同理p和q也都是偶數..令$m=2m_1, n=2n_1, p=2p_1, q=2q_1$並代回(1)和(2)，可得

$$n_1^2-m_1^2=2p_1q_1 \qquad (3)$$

$$q_1^2-p_1^2=2m_1n_1 \qquad (4)$$

同理m_1,n_1,p_1,q_1也都是偶數.重覆此方法到最後可得m,n,p,q中至少有一者為0

當$m=0$，則可得$p=\pm q$因此$n^2=\pm 2p^2$，即$n=p=q=0$，類似地，當$n=0$或$p=0$

或$q=0$時，也可得$m=n=p=q=0$.所以滿足題目的整數解為$m=n=p=q=0$.

[問題二] 參考解答：

$\because 234=2\times 3^2\times 13$，所以$A=\left\{2^a\cdot 3^b\cdot 13^c \mid 0\le a\le 567, 0\le b\le 1134, 0\le c\le 567\right\}$.

令$B=\left\{2^a\cdot 3^{1134-a-c}\cdot 13^c \mid 0\le a\le 567,\ 0\le c\le 567\right\}$.

$\because 0\le a\le 567,\ 0\le c\le 567$，$\therefore 0\le 1134-a-c\le 1134$；因而$B$為$A$的一個子集合.

由於a, c各有568種可能值，所以B含有$568^2=322624$個元素.若B中有兩個元素

$2^a\cdot 3^{1134-a-c}\cdot 13^c, 2^i\cdot 3^{1134-i-j}\cdot 13^j$使得$2^i\cdot 3^{1134-i-j}\cdot 13^j \mid 2^a\cdot 3^{1134-a-c}\cdot 13^c$,

則 $\qquad 1134-a-c\ge 1134-i-j$； $\qquad (1)$

$\qquad a\ge i$； $\qquad (2)$

$\qquad c\ge j$. $\qquad (3)$

由(1)又可得 $\quad i+j\ge a+c$. $\qquad (4)$

由(2), (3), (4)可知：$a=i, c=j$，因此B中的每一個元素都不能整除B中的其他元素.

設C為A的子集合，C中元素的個數多於568^2.因為當$0\le a\le 567,\ 0\le c\le 567$時，至多

有568^2個相異的數對(a,c)，所以由鴿籠原理：C中必有兩個形如$2^{a_1}\cdot 3^{b_1}\cdot 13^{c_1}$,

$2^{a_2}\cdot 3^{b_2}\cdot 13^{c_2}$的元素，其中$a_1=a_2, c_1=c_2$，但$b_1\ne b_2$.此時，這兩個元素其中一個

可被另一個整除；即集合C不滿足所要求的條件，故滿足條件的子集合之元素的

個數至多有568^2個。

[問題三] 參考解答：

(1) 令 $S_{ij}=a_i a_j+b_i b_j+c_i c_j$ 則

$$f(\Delta ABC)=\sum_{i=1}^{3}\max_{j\neq i}(1+S_{ij})=3+\sum_{i=1}^{3}\max_{j\neq i}S_{ij}$$

$$\geq 3+\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{3}S_{ij}-S_{ii}\right) \qquad \because \text{最大數} \geq \text{平均數}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}S_{ij} \qquad \because S_{ii}=1,\forall i=1,2,3$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{3}b_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{3}c_i\right)^2\right)\geq\frac{3}{2}$$

$$\left(\because \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}S_{ij}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\bar{u}_i\cdot\bar{u}_j)=\sum_{i=1}^{3}\bar{u}_i\cdot\sum_{j=1}^{3}\bar{u}_j=\left\|\sum\bar{u}_i\right\|^2\geq 0\right.$$

其中 $\bar{u}_i=(a_i,b_i,c_i)\ \forall i$

(2) "=" 成立 $\Leftrightarrow S_{ij}=$ 常數 $k,\forall i\neq j$ 且 $\bar{u}_1+\bar{u}_2+\bar{u}_3=0$，且 $\left\|\bar{u}_i-\bar{u}_j\right\|^2=2-2k\ \ \forall i\neq j$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ 為重心在原點的正三角形