

九十三年年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試(二) 試題

注意事項：

- (1) 時間分配：2小時(16:00~18:00)。
- (2) 配分：每題35分。
- (3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4) 不可使用電算器。
- (5) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：試求所有整數 $m, n, p, q$ 使得 $m^2 - n^2 + 2pq = 0$ 且 $p^2 - q^2 + 2mn = 0$

【問題二】：設 $A = \{n \mid n \text{ 為 } 234^{567} \text{ 的正因數}\}$ ，考慮滿足下列條件的所有 $A$ 之子集合 $B$ ；

$B$ 中每一元素都不能整除 $B$ 中其它的元素。

試問這樣的子集合 $B$ 中的元素個數最多有幾個？

【問題三】：考慮所有頂點在單位球上的 $\triangle ABC$ ，其中 $A(a_1, b_1, c_1), B(a_2, b_2, c_2)$

$C(a_3, b_3, c_3)$  滿足： $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$ 。

定義 $\triangle ABC$ 的理想度數為：

$$f(\triangle ABC) = \max\{t_{12}, t_{13}\} + \max\{t_{21}, t_{23}\} + \max\{t_{31}, t_{32}\}$$

其中 $t_{ij} = 1 + a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j$ ， $\forall i, j = 1, 2, 3$

- (1) 試求 $f(\triangle ABC)$ 的最小值。
- (2) 試找出理想度數 $f(\triangle ABC)$ 有最小值的所有可能之 $\triangle ABC$ 。

(註： $\max\{x, y\}$ 表示 $x$ 與 $y$ 中較大的數)