

九十三年學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究(二)試題

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時。
- (2) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (3) 不可使用電算器。
- (4) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：銳角  $\triangle ABC$  中， $D, E$  為  $\overline{BC}$  邊上的三等分點， $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$ ， $F$  為

$\overline{AC}$  邊上的點， $\overline{AF} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ ，且  $G$  為  $E$  在  $\overline{AB}$  邊上的垂足。

試證：若  $\overline{FE} \perp \overline{BC}$ ，則  $A, G, D, C$  四點共圓。

【問題二】：設  $\triangle ABC$  中， $\angle B = 30^\circ$  且三邊長分別為  $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ ，

試證： $b^2 - c^2 \leq 2a^2$ 。

【問題三】：給定正整數  $n$ ， $\phi(n)$  為小於  $n$  並與  $n$  互質的正整數之個數。

試證：對每個大於 3 的奇數  $n$ ，都存在一個與  $n$  互質的質數  $p$ ，

使得  $p \mid (2^{\phi(n)} - 1)$ 。