

九十三年年度高級中學數學科能力競賽決賽

口試【參考解答】

[問題一]參考解答：

假設正整數 n 滿足所需的條件，

(1) 若 n 為一位數， $\therefore n^2$ 最多為 2 位數， n^3 最多為 3 位數

$\therefore n, n^2, n^3$ 的所有數字最多有 $1+2+3=6 < 10$. (不合)

(2) 若 n 為至少三位數， $\therefore n^2$ 為至少五位數，且 n^3 為至少七位數，

$\therefore n, n^2, n^3$ 的所有數字至少有 $3+5+7=15 > 10$ ，與題意不合。

因此， n 必為二位數。若 n^2 為四位數， $\therefore n^3$ 為至少五位數，

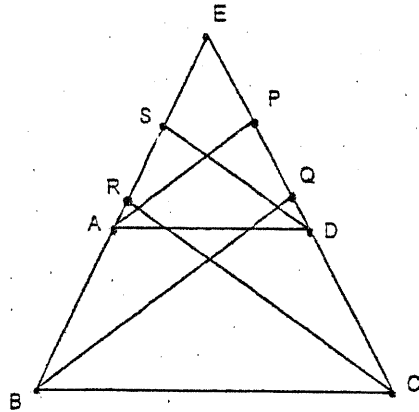
$\therefore n, n^2, n^3$ 的所有數字至少有 $2+4+5=11 > 10$ ，與題意不合。

$\therefore 10 \leq n < 100, 100 \leq n^2 < 1000, 10000 \leq n^3 < 10^5$

因此，由上式知 $10 \leq n \leq 31$ ，且 $22 \leq n \leq 46 \therefore 22 \leq n \leq 31$ 。

但這種 n 值不能滿足題意。故得證。

[問題二]參考解答：



$$\begin{aligned} a\Delta ABC \cdot a\Delta ACD &= a\Delta ABD \cdot a\Delta BCD \\ \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CR} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{AP} &= \overline{AB} \cdot \overline{DS} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BQ} \\ \Leftrightarrow \overline{CR} : \overline{DS} &= \overline{BQ} : \overline{AP} \end{aligned} \quad (*)$$

因為 $\Delta ESD \approx \Delta ERC$ ，所以 $\overline{CR} : \overline{DS} = \overline{CE} : \overline{DE}$ (1)

因為 $\Delta EAP \approx \Delta EBQ$ ，所以 $\overline{BQ} : \overline{AP} = \overline{BE} : \overline{AE}$ (2)

$ABCD$ 為梯形 $\Leftrightarrow \Delta AED \approx \Delta BEC$ ，

然而 $\Delta AED \approx \Delta BEC$ ，若且唯若 $\overline{BE} : \overline{AE} = \overline{CE} : \overline{DE}$ (3)

若 $ABCD$ 為梯形，則(3)成立。由(1);(2);(3)可得

$$\overline{CR} : \overline{DS} = \overline{CE} : \overline{DE} = \overline{BE} : \overline{AE} = \overline{BQ} : \overline{AP} \quad (4)$$

所以(*)成立，因而 $a\Delta ABC \times a\Delta ACD = a\Delta ABD \times a\Delta BCD$ 。

反之，若 $a\Delta ABC \times a\Delta ACD = a\Delta ABD \times a\Delta BCD$ 成立，則(*)成立。

由(1),(2),(*)可得(4)成立，因而(3)成立；由此可知 $ABCD$ 為梯形。