九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
筆試（二）參考解答

【問題一】：在ΔABC中，D、E及F分別在三邊$\overline{BC}$、$\overline{CA}$及$\overline{AB}$上，且使得$\overline{AD}$、$\overline{BE}$及$\overline{CF}$三線段交於一點．過F作平行於直線ED的直線交$\overline{AD}$於K，並交$\overline{CB}$的延長線於L．試證：$\overline{FK}=\overline{FL}$．

【參考解答】：(1) 由西瓦定理：$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}\times\dfrac{\overline{CD}}{\overline{DB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FA}}=1$．

(2) 延長$\overline{ED}$交$\overline{AB}$延長線於M，則由孟氏定理

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}\times\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}}=1.$$

(3) 由(1), (2)知

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FA}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}}，\text{即}\quad \frac{\overline{AF}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{BM}}. \qquad (*)$$

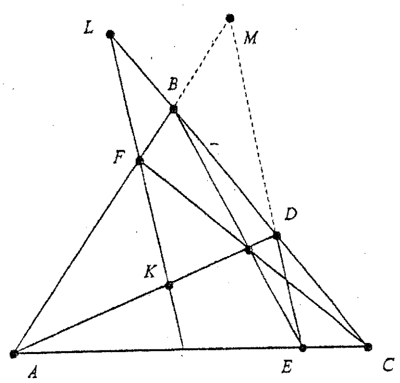
(4) 由$\overline{FL}//\overline{DM}$知$\Delta AFK\sim\Delta AMD$，$\Delta BLF\sim\Delta BDM$；故得

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{FK}}{\overline{MD}},\quad \frac{\overline{BF}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{FL}}{\overline{MD}}. \qquad (**)$$

(5) 由(*)及(**)可得

$$\frac{\overline{FK}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{FL}}{\overline{MD}},$$

所以$\overline{FK}=\overline{FL}$．



【問題二】：設正實數 a,b 滿足：$a^3+b^3+3ab=1$．試求 $(a+\frac{1}{a})^3+(b+\frac{1}{b})^3$ 的最小值．

【参考解答一】：因為 $a^3+b^3+3ab=1$，可改寫為 $a^3+b^3+(-1)^3-3ab(-1)=0$．所以

$$(a+b-1)[(a-b)^2+(a+1)^2+(b+1)^2]=0.$$

因此，$a+b=1$ 或 $a=b$ 且 $a=b=-1$（a,b 為正實數，不合）．由算幾不等式

$$ab \le (\frac{a+b}{2})^2 \le \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

令 $f(a,b)=(a+\frac{1}{a})^3+(b+\frac{1}{b})^3$，則由(1)可得

$$\begin{aligned}
f(a,b) &= (a+\frac{1}{a})^3+(b+\frac{1}{b})^3 \\
&= a^3+b^3+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+3(a+b)+\frac{3}{a}+\frac{3}{b} \\
&= a^3+b^3+\frac{1}{a^3b^3}(a^3+b^3)+3(a+b)+\frac{3}{ab}(a+b) \\
&= (1+\frac{1}{a^3b^3})(a^3+b^3)+3+\frac{3}{ab} \\
&\ge (1+4^3)(a^3+b^3)+3+12 \\
&= 65(1-3ab)+15 \\
&\ge 65(1-\frac{3}{4})+15 \\
&= \frac{125}{4}.
\end{aligned}$$

等號成立的充要條件為 $a=b=\frac{1}{2}$．

【参考解答二】：由不等式 $x^3+y^3+z^3 \ge 3(\frac{x+y+z}{3})^3$ 及参考解答一中所定義的 $f(a,b)$ 可得

$$f(a,b)+(\frac{5}{2})^3 \ge 3\left(\frac{a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{5}{2}}{3}\right)^3 = 3\left(\frac{1+\frac{1}{ab}+\frac{5}{2}}{3}\right)^3 \ge 3\left(\frac{1+4+\frac{5}{2}}{3}\right)^3 = \frac{375}{8}.$$

所以，$f(a,b) \ge \frac{375}{8}-(\frac{5}{2})^3=\frac{125}{4}$．

【参考解答三】：設 $g(x)=(x+\frac{1}{x})^3$，則 $g(x)$ 為 $(0,1)$ 上的凸函數．由 $b=1-a$ 可得

$$f(a,b)=g(a)+g(1-a) \ge 2\cdot g(\tfrac{1}{2}\cdot a+\tfrac{1}{2}\cdot(1-a))=2\cdot g(\tfrac{1}{2})=2\cdot\frac{125}{8}=\frac{125}{4}.$$

【註】：由算幾不等式可得 $1=a^3+b^3+3ab \ge ab(a+b)+3ab \ge 2ab\sqrt{ab}+3ab$；若令 $x=\sqrt{ab}>0$，則前式等價於

$2x^3+3x^2-1 \le 0 \iff (2x-1)(x+1)^2 \le 0 \iff 2x-1 \le 0 \iff x \le \frac{1}{2}$．

因此，$ab=x^2 \le \frac{1}{4}$．所以既使不知道 $a+b=1$，亦能證明 $ab \le \frac{1}{4}$．

【問題三】: 試求所有的正整數n，使得$n^5+2n^4+2n^3+2n^2+2n+1$為一完全平方數.

【参考解答】: 首先,我們可將$n^5+2n^4+2n^3+2n^2+2n+1$因式分解為

$$n^5+2n^4+2n^3+2n^2+2n+1=(n+1)(n^4+n^3+n^2+n+1).$$

由於$n+1$與$n^4+n^3+n^2+n+1$互質，所以$n^5+2n^4+2n^3+2n^2+2n+1$為一完全平方數的充要條件為$n+1$與$n^4+n^3+n^2+n+1$均為完全平方數.

其次，對於任意的正整數n，

$$(n^2+\frac{n}{2})^2<n^4+n^3+n^2+n+1<(n^2+\frac{n}{2}+1)^2.$$

由於當n為偶數時，$n+\frac{n}{2}$與$n+\frac{n}{2}+1$為連續正整數，而$n^4+n^3+n^2+n+1$為一完全平方數. 所以，只有當n為奇數時，上式才有可能成立. 在此情形下，

$$n^4+n^3+n^2+n+1=(n^2+\frac{n-1}{2}+1)^2,$$

由此可得，$n=-1$(不合)，$n=3$. 故，僅在$n=3$時，可使得$n^4+n^3+n^2+n+1$為一完全平方數. 當$n=3$時，$n+1=4=2^2$也是一個完全平方數.