

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
獨立研究(二)試題

注意事項：

- (20) 時間分配：2 小時。
- (21) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (22) 不可使用電算器。
- (23) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：設多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ ，其中 $a \geq 0$ ， $b \geq 0$ ，且 $f(x) = 0$ 的三根都是實數。試證： $f(2) \geq 27$ 。

【問題二】：試求所有的整數 m ， n ，滿足方程式 $3n^3 - m^2 + 18n - 6m - 30 = 0$ 。

【問題三】：每一個由正整數所形成的集合都有一個「交錯和」，它的定義如下：「將此集合中的數，由大到小排列，交錯的加、減得到一個結果，稱為此集合的交錯和」。例如：集合 $\{1, 2, 4, 6, 9\}$ 的交錯和為 $9 - 6 + 4 - 2 + 1 = 6$ ；集合 $\{6\}$ 的交錯和為 6；空集合的交錯和視為 0。試求 $\{1, 2, \dots, 2004\}$ 所有子集合交錯和的總和。