九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
獨立研究（一）参考解答

【問題一】：試求滿足

$$(x+93)P(x-93)+(x-93)P(x+93)=2xP(x) \qquad (1)$$

的實係數多項式 $P(x)$。

【参考解答】：取 $x=-93$ 代入(1)式可得

$$0\cdot P(-186)-186\cdot P(0)=-186\cdot P(-93),$$

由此可得 $P(0)=P(-93)$；取 $x=93$ 代入(1)式可得

$$186\cdot P(0)+0\cdot P(186)=186\cdot P(93),$$

由此可得 $P(0)=P(93)$；所以 $P(0)=P(93)=P(-93)$. 設 $P(0)=P(93)=P(-93)=c$，則 $P(x)=c$ 有三個根 $-93, 0, 93$, 因而存在實係數多項式 $Q(x)$ 使得 $P(x)$ 可以表示為

$$P(x)=x(x-93)(x+93)Q(x)+c. \qquad (2)$$

將此代入(1)式化簡, 除以 $x(x-93)(x+93)$ 後可得

$$(x-186)Q(x-93)+(x+186)Q(x+93)=2xQ(x). \qquad (3)$$

因為(3)式對於所有的實數 $x\neq -93, 0, 93$ 都成立, 且 $Q(x)$ 為多項式, 所以(3)式對於所有的實數 x 都成立. 若 $Q(x)\equiv a$ 是一常數多項式函數, 則(3)式可表示為

$$a(x-186)+a(x+186)=2ax;$$

此顯然成立; 因而

$$P(x)=ax(x-93)(x+93)+c=ax^3-8649ax+c$$

也滿足(1)式.

現在我們僅需證明：$Q(x)\equiv a$ 是一常數多項式. 記 $Q(186)=Q(93\times 2)=a$. 以 $x=186=93\times 2$ 代入(3)式, 我們可得

$$0\times Q(93)+(93\times 4)\times Q(93\times 3)=(93\times 4)\times Q(93\times 2),$$

由此可得

$$Q(93\times 3)=Q(93\times 2)=a.$$

以 $x=279=93\times 3$ 代入(3)式, 我們可得

$$93\times Q(186)+(93\times 5)\times Q(93\times 4)=(93\times 6)\times Q(93\times 3),$$

由此可得 $93\times a+(93\times 5)\times Q(93\times 4)=(93\times 6)\times a$，因而 $Q(93\times 4)=a$. 事實上, 由數學歸納法可證：對於所有的正整數 $n\geq 2$，$Q(93\times n)=a$. 所以 $Q(x)\equiv a$，因而

$$P(x)=ax^3-8649ax+c,$$

其中 a, c 可以是任意的實數.

【問題二】： 設 x, y, z, w 都是正實數. 試證：

$$(1+x)(1+y)(1+z)(1+w) \geq (1+\sqrt[3]{xyz})(1+\sqrt[3]{yzw})(1+\sqrt[3]{zwx})(1+\sqrt[3]{wxy}).$$

【參考解答】：利用算幾不等式($a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$), 得

$$\begin{aligned}(1+x)(1+y)(1+z) &= 1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz \\ &\geq 1+3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt[3]{(xyz)^2}+xyz \\ &= (1+\sqrt[3]{xyz})^3.\end{aligned}$$

同理可得,

$$\begin{aligned}(1+y)(1+z)(1+w) &= (1+\sqrt[3]{yzw})^3, \\ (1+z)(1+w)(1+x) &= (1+\sqrt[3]{zwx})^3, \\ (1+w)(1+x)(1+y) &= (1+\sqrt[3]{wxy})^3.\end{aligned}$$

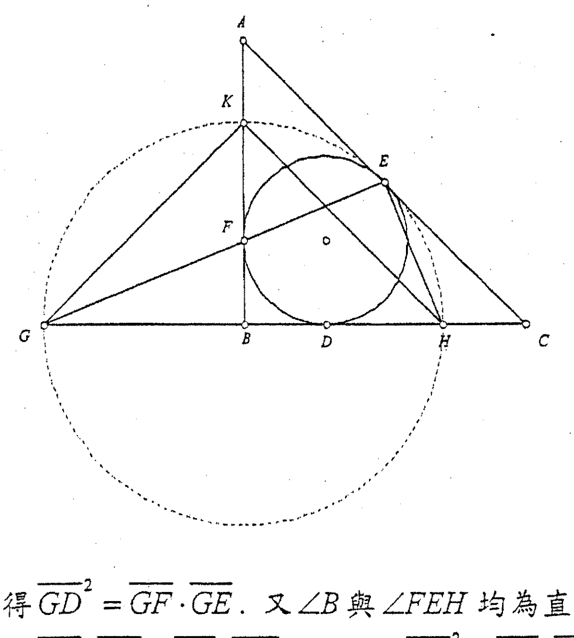
將上面四個不等式相乘、化簡後可得

$$(1+x)(1+y)(1+z)(1+w) \geq (1+\sqrt[3]{xyz})(1+\sqrt[3]{yzw})(1+\sqrt[3]{zwx})(1+\sqrt[3]{wxy}),$$

其中等號成立的充要條件為 $x=y=z=w$.

【問題三】：在 ΔABC 中, $\angle B$ 是直角, 其內切圓與 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 分別交於點 D、E、F. 直線 EF 與直線 BC 交於點 G；過 E 引 $\overline{EF}$ 的垂線交 $\overline{BC}$ 於點 H. 設 ΔGHE 的外接圓與 $\overline{AB}$ 交於點 K. 試證：$\overline{GK}=\overline{GD}$.

【參考解答】：



如圖所示, 由切割線定理得 $\overline{GD}^2=\overline{GF}\cdot\overline{GE}$. 又 $\angle B$ 與 $\angle FEH$ 均為直角, ΔGHE 與 ΔGFB 相似, 所以 $\overline{GE}:\overline{GB}=\overline{GH}:\overline{GF}$, 即 $\overline{GF}\cdot\overline{GE}=\overline{GB}\cdot\overline{GH}$, 因而得 $\overline{GD}^2=\overline{GB}\cdot\overline{GH}$. 另方面, 因 G、H、E、K 四點共圓, 且 $\angle FEH$ 為直角, 得 $\angle GKH$ 為直角. 故, ΔGKH 與 ΔGKB 相似. 因此, $\overline{GH}:\overline{GK}=\overline{GK}:\overline{GB}$, 即 $\overline{GK}^2=\overline{GB}\cdot\overline{GH}$. 綜合以上結果可得 $\overline{GK}^2=\overline{GD}^2$. 故, $\overline{GK}=\overline{GD}$.