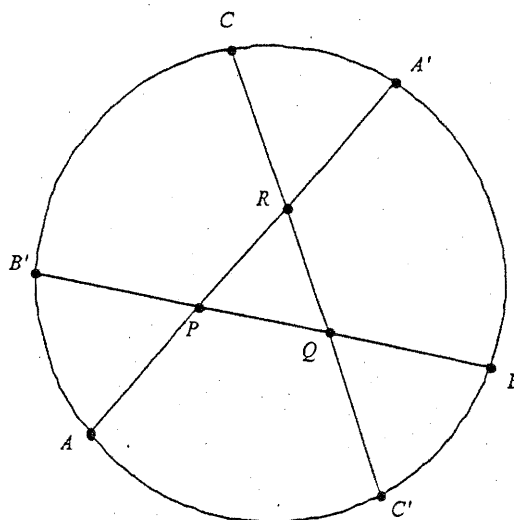


## 九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽 口試題參考解答

【問題一】：如圖所示，圓中的三弦  $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$  兩兩相交，其交點分別為  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 。  
已知  $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR}$  且  $\overline{A'R} = \overline{B'P} = \overline{C'Q}$ 。  
試證： $\triangle ABC$  為正三角形。



【參考解答】：

設  $\overline{PQ} = r$ ,  $\overline{QR} = p$ ,  $\overline{RP} = q$ ;  
 $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = m$  且  $\overline{A'R} = \overline{B'P} = \overline{C'Q} = n$ ,

則由圓幂定理可得

$$n(m+q) = m(n+p),$$

$$n(m+r) = m(n+q),$$

$$n(m+p) = m(n+r).$$

由此可得

$$nq = mp, \quad nr = mq \text{ 且 } np = mr,$$

所以， $m = n$ . 因而， $p = q = r$ ，即  $\triangle PQR$  為正三角形。因此， $\triangle A'CR$ ， $\triangle B'AP$ ， $\triangle C'BQ$  均為正三角形。故， $\triangle ABC$  為正三角形。

【問題二】：用 1, 2, 3, 4, 5 排出 120 個各位數均相異的五位數，將它們由小到大排列如下：

12345,	12354,	12435, ……	54321
第 1 個	第 2 個	第 3 個	第 120 個

試問 34521 是排在第幾個？第 100 個數為何？

【參考解答】：萬位數排 1, 2 的數各有  $4!$  個，萬位數排 3 千位數排 1, 2 的數各有  $3!$  個，萬位數排 3 千位數排 4 百位數排 1, 2 的數各有  $2!$  個，萬位數排 3 千位數排 4 百位數排 5 的數依序有 34512 及 34521 兩數。故，34521 是排在第  $2 \times 4! + 2 \times 3! + 2 \times 2! + 1 + 1 = 66$ ，所以 34521 是排在第 66 個。同理，萬位數是 1, 2, 3, 4 的五位數有  $4 \times 4! = 96$  個，所以第 100 個數是 51342。