九十一學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（二）【參考解答】

一、【解答】

設小明家的門牌號碼是永樂街N號，且他家這邊共有B棟房子。由“小明家左手邊的門牌號碼總和剛好等於右手邊門牌號碼的總和”得到

$$
\begin{aligned}
& 2+4+\cdots+(N-2)=(N+2)+\cdots+(2B) \\
\Rightarrow\ & 2(2+4+\cdots+(N-2))+N=2+4+\cdots+(2B) \\
\Rightarrow\ & N\left(\frac{N-2}{2}\right)+N=B(B+1) \\
\Rightarrow\ & N^2=2B^2+2B \\
\Rightarrow\ & (2B+1)^2-2N^2=1.
\end{aligned}
$$

因此$(2B+1,N)$是佩爾方程式

$$x^2-2y^2=1$$

的正數解。而這方程式的頭幾個正整數解為

x	3	17	99	577
y	2	12	70	408

由上表得到

B	1	8	49	288
N	2	12	70	408

由題意知道：$18\le 2B<456$。因此$B=49$，$N=70$，即小明家是永樂街70號。

二、【解答】

證明：不妨假設$a \geq b \geq c$，分幾種情形討論：

(1) $a = 1$，此時，很明顯$b = c = 1$，因而$f(n) = 3$，$n \in \mathbb{N}$。

(2) $a > 1 \geq b \geq c$，考慮

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1} - a^n - b^n - c^n \\ &= a^n(a-1) - \{b^n(1-b) + c^n(1-c)\} \end{aligned}$$

其中$a^n(a-1)$隨n增加而遞增$(\because a > 1)$

而$b^n(1-b) + c^n(1-c)$隨n增加而遞減

$(\because 1 \geq b \geq c)$。故$f(n+1) - f(n)$隨$n$增加而遞增。因此只要證明

$f(2) - f(1) > 0$即知道$f(n+1) - f(n) > 0$，$n \in \mathbb{N}$。

驗證：$f(2) - f(1) > 0$

由

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) &= a^2 + b^2 + c^2 - (a+b+c) \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{3} - (a+b+c) \quad \text{(柯西不等式)} \\ &= (a+b+c)\{\frac{a+b+c}{3} - 1\} \\ &> (a+b+c)\{\sqrt[3]{abc} - 1\} \quad \text{(算幾不等式)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(3) $a \geq b > 1 \geq c$，仿(2)之討論亦可知$f(n+1) > f(n)$，$n \in \mathbb{N}$。

由(1), (2), (3)討論得證$f(n+1) \geq f(n)$，$n \in \mathbb{N}$。而對某n使得

$f(n+1) = f(n)$若且唯若$a = b = c = 1$即有$f(n)$恆等於3。

三、【解答】

設a_i表示第i種產品，$i=1,2,\cdots,m$。由已知條件：某一種產品恰有n位顧客購買，不失一般性，可設第1種產品a_1恰由顧客$B_1,B_2,\cdots,B_n$所購買。又依規定每位顧客至少要選購k種不同的產品，故顧客B_j除了產品a_1外至少要採購其他s_j種不同的產品，其中$s_j\geq k-1, j=1,2,\cdots,n$。以下我們分兩種方式來計算這$n$位顧客共買了產品$a_1$與其他產品$a_p$的組數。

(i) 對每一個$j=1,2,\cdots,n$，顧客B_j購買產品a_1和其他s_j種不同的產品，故計算產品a_1與a_p的組數時，顧客B_j共買了s_j組。因此，這n位顧客共買了$s_1+s_2+\cdots+s_n$組。

(ii) 另一方面，我們考慮$m-1$組產品(a_1,a_p)，$p=2,3,\cdots,m$。由已知條件：至多有r位顧客購買產品a_1與a_p，設有t_p位顧客購買產品a_1與a_p，其中$t_p\leq r$。注意：這t_p位顧客必為$B_1,B_2,\cdots,B_n$中的t_p位。由此，我們可得這n位顧客共買了$t_2+t_3+\cdots+t_k$組。

因此，由(i)與(ii)得

$$s_1+s_2+\cdots+s_n=t_2+t_3+\cdots+t_m。$$

利用$s_j\geq k-1,\forall j=1,2,\cdots,n$及$t_p\leq r,\ \forall p=2,3,\cdots,m$，可得

$$n(k-1)\leq r(m-1)。$$

於是

$$k\leq 1+\frac{r(m-1)}{n}。$$