

# 九十一學年度全國高中數學科能力競賽決賽

## 筆試試題 (二)

注意事項：

- (1)時間分配：2小時(16:00~18:00)。
- (2)配分：每題皆為7分。
- (3)不可使用計算器。

一、小明的家是在永樂街門牌號碼雙號的那邊。閒來無事的他在這條街上散步並統計雙號這邊的門牌號碼，他很意外的發現：他家左手邊的門牌號碼總和剛好等於右手邊門牌號碼的總和(假設門牌號碼為從2開始的連續偶數)。

有一天小明剛從永樂街18號的便利商店走出來，就碰到一位問路的小姐，她問“永樂街456號怎麼走？”，小明摸摸頭想了一下說“這條街的門牌號碼沒有超過456號，妳一定是記錯地址了！”。請問：小明的家是永樂街幾號？

二、已知 $a, b, c$ 皆為正數且滿足 $abc=1$ ，設 $f(n)=a^n+b^n+c^n$ 。試證：

(1)對所有的正整數 $n$ ， $f(n+1) \geq f(n)$ 都成立。

(2)如果存在某個正整數 $m$ 使得 $f(m+1)=f(m)$ ，則對於所有的正整數 $n$ ， $f(n)=3$ 。

三、設 $m, k, n, r$ 都是正整數，其中 $m \geq 2$ 。某百貨公司為促銷 $m$ 種不同的產品，銷售部門要求每位顧客至少要選購 $k$ 種不同的促銷品。今有一群顧客採購這類促銷品，已知某一種促銷品恰有 $n$ 位顧客購買，而對於任意兩種促銷品至多有 $r$ 位顧客同時購買。試證：

$$k \leq 1 + \frac{r(m-1)}{n}。$$