九十一學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）【參考解答】

一、【解答】

取 $x=y=z=0$，得 $f(0,0)=0$；

取 $x=y=0$，得 $f(0,z)=f(z,0)=0$；

取 $x=k$，$y=N-1-k$，$z=1$，$0\le k\le N-1$，

得 $f(N-1,1)+f(N-k,k)+f(k+1,N-1-k)=0.$

故 $Nf(N-1,1)+\sum\limits_{k=0}^{N-1}f(N-k,k)+\sum\limits_{k=0}^{N-1}f(k+1,N-1-k)=0$

又 $$\sum_{k=0}^{N-1}f(k+1,N-1-k)=-\sum_{k=1}^{N-1}f(N-k,k)-f(0,N)$$

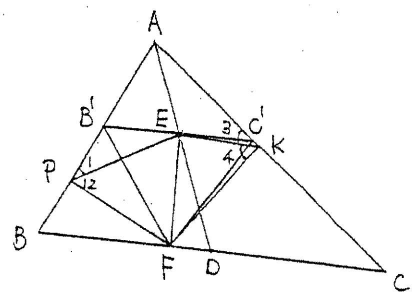
$\therefore Nf(N-1,1)=0,\quad f(N-1,1)=0.$

因此 $f(N-k,k)=-f(k+1,N-1-k)$

$\qquad\qquad=f(N-(k+1),k+1)$

進一步得 $f(N-k,k)=0,\ k=0,1,\cdots,N.$

二、【解答】



如圖欲證 $\angle 1=\angle 3$

$\Leftrightarrow \angle 2=\angle 4$

(1) 過 E 作 $\overline{B'C'}//\overline{BC}$，$B'\in\overline{AB}$、$C'\in\overline{AC}$，連 $\overline{B'F}$、$\overline{C'F}$

(2) 由 $\overline{EF}\perp\overline{BC}$，$\overline{B'C'}//\overline{BC}$，故 $\overline{B'C'}\perp\overline{EF}$，$\angle B'EF=\angle C'EF=90^o$

(3) 由 $\overline{B'C'}//\overline{BC}$，$\overline{BD}=\overline{DC}$ 得 $\overline{B'E}=\overline{C'E}$，即 E 為 $\overline{B'C'}$ 的中點

(4) 由 (2)、(3) 知 $\overline{B'F}=\overline{C'F}$ 故 $\angle FB'E=\angle FC'E$

(5) 由 $\angle APF=\angle B'EF=90^o$ 知 $PB'EF$ 為圓內接四邊形，故 $\angle 2=\angle FB'E$

(6) 同理 $\angle 4=\angle FC'E$

(7) 由 (4)、(5)、(6) 得證 $\angle 2=\angle 4$

三、【解答】

因T_n的非空子集合個數為2^n-1，僅須證明A_n類集合的個數為偶數即可。

當$n=1$時，$|A_1|=0$；當$n=2$時，$|A_2|=0$；當$n=3$時，有$\{1,3\},\{1,2,3\}$兩個A_3類集合；當$n=4$時，則有$\{1,3\},\{1,2,3\}$；$\{2,4\},\{2,3,4\}$等4個A_4類集合，而$n=5$時，仍有$\{1,3\},\{1,2,3\}$；$\{2,4\},\{2,3,4\}$；$\{1,5\},\{1,3,5\}$；$\{3,5\},\{3,4,5\}$；$\{1,2,4,5\},\{1,2,3,4,5\}$等10個$A_5$類。據此觀察，$A_n$類集合依其平均數$m$，$1<m<n$，具有成對的性質：

當$S\subset T_n$，$|S|\geq 2$且其平均數$a(S)=m$時，若$m\notin S$，

則$S\cup\{m\}\subset T_n$且$|S\cup\{m\}|\geq 3$，$a(S\cup\{m\})=m$，

即$S\cup\{m\}$應為一個A類集合；

另當$m\in S$則$|S|\geq 3$，且扣除m以外的元素集合$(S\backslash\{m\})$，亦有$|S-\{m\}|\geq 2$，$a(S\backslash\{m\})=m$，即$S-\{m\}$也是一個A類集合。