

九十一學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）

注意事項：

- (1) 時間分配：2小時 (13:20~15:20)。
- (2) 配分：每題皆為 7 分。
- (3) 不可使用計算器。

一、設對所有的非負整數 x, y, z ，函數 f 滿足下列兩個條件：

- (1) $f(x, y) = -f(y, x)$ ；
- (2) $f(x+y, z) + f(y+z, x) + f(z+x, y) = 0$ 。

試證 $f(x, y) = 0$ 。

二、在銳角 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ ， D 為 \overline{BC} 的中點， E 為 \overline{AD} 上異於 A, D 的任一點；過 E 作垂直於 \overline{BC} 的直線交 \overline{BC} 於 F ，再過 F 分別作與 \overline{AB} 、 \overline{AC} 垂直的直線交 \overline{AB} 於 P 及交 \overline{AC} 於 K 。試證： $\angle APE = \angle AKE$ 。

三、設 $T_n = \{1, 2, \dots, n\}$ 為前 n 個正整數組成的集合。若 S 為 T_n 的子集合且滿足以下兩個條件：

- (1) S 的元素個數大於 1；
- (2) S 中所有元素的算術平均數為整數，

則我們稱 S 為一個 A_n 類集合。

試證：對每一個正整數 n ，都有偶數個 A_n 類集合。