九十一學年度全國高中數學科能力競賽決賽

獨立研究試題（二）【參考解答】

一、【解答】

由題意知：

$$\sin(x+y+z) = a(\sin x + \sin y + \sin z)$$
$$\cos(x+y+z) = a(\cos x + \cos y + \cos z)$$

所以 $e^{i(x+y+z)} = a(e^{ix} + e^{iy} + e^{iz})$

將左式移至右式整理可得

$$e^{-i(y+z)} + e^{-i(x+z)} + e^{-i(x+y)} = \frac{1}{a}$$

所以

$$\cos(x+y) + \cos(y+z) + \cos(z+x) = \frac{1}{a}$$
且 $$\sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(z+x) = 0.$$

二、【解答】

設等比數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 剛好滿足上述條件，且公比為 p/q, $(p,q) = 1$, $p \geq q+1$。因為要讓項數最多，所以公比必須盡可能的接近1，即 $p = q+1$。此時

$$a_n = a_1 \times \left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1} \Rightarrow q^{n-1} | a_1.$$

(1) 當 $q = 1$ 時，由

$$100 \leq a_1, 100 \times 2^{n-1} \leq a_n = a_1 \times 2^{n-1} \leq 1000 \Rightarrow n \leq 4.$$

(2) 當 $q \geq 3$ 時，由 $q^{n-1} | a_1$ 得到

$$4^{n-1} = (q+1)^{n-1} \leq a_n = a_1 \left(\frac{q+1}{a}\right)^{n-1} \leq 1000 \Rightarrow n \leq 5.$$

(3) 當 $q = 2$ 時，由

$$1000 \geq a_n = a_1 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \geq 100 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow n \leq 6.$$

現在找一組6項的等比數列，皇天不負苦心人，被我找到了，就是

$$128, 192, 288, 432, 648, 972.$$

接著證明就只有這等比數列而已。如果還有6項的等比數列滿足題意，其公比必為$\frac{3}{2}$，且

$$
\begin{aligned}
&2^5|a_1, a_1 \geq 100, a_6 = a_1\left(\frac{3}{2}\right)^5 \leq 1000 \\
&\Rightarrow 3.125 \leq \frac{100}{32} \leq \frac{a_1}{32} \leq \frac{1000}{243} \leq 4.116 \\
&\Rightarrow \frac{a_1}{32} = 4 \\
&\Rightarrow a_1 = 128.
\end{aligned}
$$

由此得到128, 192, 288, 432, 648, 972是唯一一組最長的等比數列。

三、【解答】

不失一般性，我們假設

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_8$$

令$b = a_8 - a_1$則$a_i - a_j \geq b - 17$

$b = a_8 - a_1 = \sum_{i=1}^{7} a_{i+1} - a_i \geq 7(b - 17)$

$\Rightarrow 6b \leq 119 \Rightarrow b \leq 19$

如果$b = 19 = a_8 - a_1$，則$\max\{a_8 - a_2, a_7 - a_1\} = 18$

(i) $a_8 - a_2 = 18 \Rightarrow a_2 - a_1 = (a_8 - a_1) - (a_8 - a_2) = 1$

(ii) $a_7 - a_1 = 18 \Rightarrow a_8 - a_7 = (a_8 - a_1) - (a_7 - a_1) = 1$

$\therefore b \leq 18$

令$\{a_1, \cdots, a_8\} = \{1, 2, 5, 6, 9, 15, 17, 19\}$

$\therefore b = 18$