

九十一學年度全國高中數學科能力競賽決賽

獨立研究試題 (二)

注意事項：

- (1) 三題中僅可以選兩題作答，並請註明題號。
 - (2) 時間分配：2 小時 (10:10~12:10)。
 - (3) 配分：每題皆為 7 分。
 - (4) 不可使用計算器。
-

一、設 a, x, y, z 皆為實數， $a \neq 0$ ，且

$$\frac{\sin(x+y+z)}{\sin x + \sin y + \sin z} = a = \frac{\cos(x+y+z)}{\cos x + \cos y + \cos z} \text{ 成立。}$$

試證：

$$(1) \sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(z+x) = 0;$$

$$(2) \cos(x+y) + \cos(y+z) + \cos(z+x) = \frac{1}{a}。$$

二、已知 a_1, a_2, \dots, a_n 是由正整數所組成的等比數列，而且滿足

$$100 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 1000。$$

試求 n 的最大值，並找出所有這種長度的等比數列。

三、設 a_1, a_2, \dots, a_8 為 8 個遞增的正整數。已知集合

$\{|a_i - a_j| : 1 \leq i, j \leq 9 \text{ 且 } i \neq j\}$ 為 18 個連續整數所成的集合，請

問： $a_8 - a_1$ 之值為何？