九十一學年度全國高中數學科能力競賽決賽

獨立研究試題（一）【參考解答】

一、【解答】

令$k(n)\in\mathbb{N}$使得$f(n)=k(n)+[\frac{n}{k(n)}]$，則

$f(n-1)\le k(n)+[\frac{n-1}{k(n)}]\le k(n)+[\frac{n}{k(n)}]=f(n)$，所以$f(n-1)\le f(n)$，

也就是，$f(n)$是一個n的遞增函數。

令$m\in\mathbb{N}$，則$f(m^2)=2m$ and $f(m^2+m)=2m+1$。所以

$$f(n)=\begin{cases}2m, & m^2\le n<m^2+m\\ 2m+1, & m^2+m\le n<(m+1)^2\end{cases}。$$

另一方面，因為$\sqrt{4n+1}$是一個n的絕對遞增函數且

$$\sqrt{4n+1}=\begin{cases}\sqrt{4m^2-3}<2m, & n=m^2-1\\ \sqrt{4m^2+1}>2m, & n=m^2\\ \sqrt{4m^2+4m+1}=2m+1, & n=m^2+m\end{cases}。$$

所以$f(n)=[\sqrt{4n+1}]$。

二、【解答】

由西瓦定理我們只需證明$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。應用正弦定律於$\triangle AFD$

與$\triangle BFD$得

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FD}}=\frac{\sin\angle FDA}{\sin\angle FAD}=\frac{\sin\angle FDA}{\cos\angle ABC},\quad \frac{\overline{FD}}{\overline{FB}}=\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BDF}=\frac{\sin\angle ABC}{\cos\angle FDA}$$

上兩式相乘得 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\sin\angle FDA\sin\angle ABC}{\cos\angle ABC\cos\angle FDA}$；

同理可得 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{\sin\angle EDA\sin\angle ACB}{\cos\angle ACB\cos\angle EDA}$。

又 $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AD}\cot\angle ABC}{\overline{AD}\cot\angle ACB}$。

由上三式及$\angle EDA=\angle FDA$，得$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。

三、【解答】

設所求分數為$\frac{a}{b}$，其中a和b為正整數且$\frac{47}{245}<\frac{a}{b}<\frac{34}{177}$。取其倒數得：

$$5+\frac{7}{34}<\frac{b}{a}<5+\frac{10}{47}.$$

可知$b>5a$，所以設$b=5a+x$，則上述不等式可改成

$$\frac{7}{34}<\frac{x}{a}<\frac{10}{47}, \text{即} \frac{47}{10}x<a<\frac{34}{7}x.$$

在區間$\left(\frac{47}{10}x,\frac{34}{7}x\right)$包含一整數的最小正整數$x$是$x=4$。這產生$a=19$和$b=99$。若$x\geq 5$，則區間$\left(\frac{47}{10}x,\frac{34}{7}x\right)$的每一元素都比23大，這意味著$b=5a+x>5\cdot 23=115$。於是，所求分數為$\frac{a}{b}=\frac{19}{99}$。