

九十一學年度全國高中數學科能力競賽決賽

獨立研究試題（一）

注意事項：

- (1) 三題中僅可以選兩題作答，並請註明題號。
- (2) 時間分配：2小時（8:00~10:00）。
- (3) 配分：每題皆為7分。
- (4) 不可使用計算器。

一、對於自然數 n ，我們定義 $f(n) = \min\left\{k + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil : k \text{ 為自然數} \right\}$ 。證明：對

於所有自然數 n ， $f(n) = \lceil \sqrt{4n+1} \rceil$ 恆成立；這裡 $\lceil \cdot \rceil$ 表高斯符號。

二、從銳角 $\triangle ABC$ 的頂點 A 引 BC 的垂線，垂足設為 D ；在 \overline{AC} 與 \overline{AB} 上分別取點 E 與 F 使得 $\angle EDA = \angle FDA$ 。試證： AD 、 BE 、 CF 三直線共點。

三、試找出介於 $\frac{47}{245}$ 和 $\frac{34}{177}$ 之間且有最小分母的有理數。