九十一學年度全國高中數學科能力競賽決賽

口試試題【參考解答】

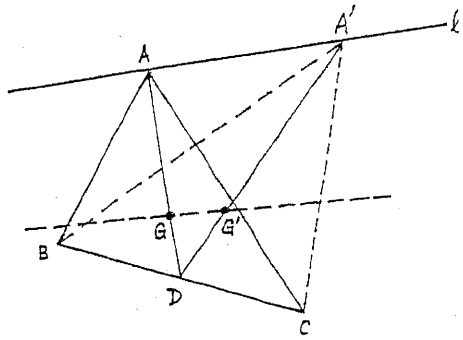
一、【解答】

(I) 三中線交點（即重心）的軌跡為一平行ℓ的一直線。

(II) 設G為$\triangle ABC$的重心，而AD為一中線

G'為$\triangle A'BC$的重心，而$A'D$為一中線

其中A為ℓ上任一點。



由於$DG : GA = 1 : 2$

$DG' : GA' = 1 : 2$

故$\overline{GG'} // \overline{AA'}$得證重心軌跡為平行$\ell$之一直線。

二、【解答】

(a) 令$n = 2k$，若有一個n項二元數列是完美數列，則經過幾次調整後可化成數列$(1,1,1\cdots,1)$。設該調整中最後的兩個數列為$(a_1, a_2, \cdots, a_{2k})$及$(b_1, b_2, \cdots, b_{2k})$，其中$b_1 = b_2 = \cdots = b_{2k} = 1$。由$b_1 = 1$可得$a_2 = 1$，由$b_{2k} = 1$，可得$a_{2k-1} = 1$。再由$b_3 = 1$及$a_2 = 1$可得$a_4 = 1$；依此下去可得$a_{2j} = 1, \forall j = 1, 2, \cdots, k$。同理，由$b_{2k-2} = 1$及$a_{2k-1} = 1$，可得$a_{2k-3} = 1$；依此下去可得$a_{2j-1} = 1$, $\forall j = 1, 2, \cdots, k$。即$a_1 = a_2 = \cdots, a_{2k} = 1$.

(b) 由(a)，任取一個不是完美數列的500項二元數列$(a_1, a_2, \cdots, a_{500})$，則可得一個不是完美數列的1001項二元列

$$(a_1, a_2, \cdots, a_{500}, 1, a_{500}, 1, a_{500}, \cdots, a_2, a_1).$$

於是，可得一個不是完美數列的2003項二元列

$$(a_1, a_2, \cdots, a_{500}, 1, a_{500}, \cdots, a_2, a_1, 1, a_1, a_2, \cdots, a_{500}, \cdots, a_2, a_1).$$

〔註明〕：更一般地，若每一個n項二元數列都是完美數列，則n必為2^m-1的型式。事實上，若有一個k項二元數列$(a_1,a_2,\cdots,a_k)$不是完美數列，則必有一個$2k+1$項二元數列不是完美數列，例如：$(a_1,a_2,\cdots,a_k,1,a_k,\cdots,a_2,a_1)$。因此，若每一個$n$項二元數列都是完美數列，則$n$必為奇數，且每一個$n_1:=\dfrac{n-1}{2}$項二元數列也都是完美數列。同理，$n$必為奇數，且每一個$n_2:\dfrac{n_1-1}{2}$項二元數列也都是完美數列。依序下去可得一數列$n_0,n_1,n_2,\cdots,n_k$，其中$n_0=n,\ n_k=1$。於是，

$$n=2n_1+1=2(2n_1+1)+1=2^2n_2+2+1=\cdots=2^k+2^{k-1}+\cdots+1=2^{k+1}-1.$$

因此，若$n=2003$，則必有一個n項二元數列不是完美數列。