

九十一學年度全國高中數學科能力競賽決賽

口試試題

一、設以固定線段 \overline{BC} 為三角形的底邊，若三角形頂點 A 沿一直線 L 移動，試判定三角形中線交點（即所謂的重心）的軌跡為何種圖形？並證明你的判定。

二、由1和-1排成的 n 項數列稱為 n 項二元數列。若將 n 項二元數列 (a_1, a_2, \dots, a_n) 調整為 (b_1, b_2, \dots, b_n) ，其中 $b_1 = a_2$, $b_n = a_{n-1}$ 且 $b_k = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, $k = 2, 3, \dots, n-1$ ，則稱之為“一次調整”，例如 $(1, 1, 1, -1, -1)$ 經過一次調整後可化成 $(1, 1, -1, -1, -1)$ 。若某 n 項二元數列經過幾次調整後可成為數列 $(1, 1, \dots, 1)$ ，則稱該數列為一“完美數列”。

- (1) 試證：除了 $(1, 1, \dots, 1)$ 之外，每一個偶數項二元數列都不是完美數列。
- (2) 是否每一個2003項二元數列都是完美數列？為什麼？