九十學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（二）【參考解答】

一、【解答】

依條件可令$n=k^2=1000m+444$，其中m為n的首m位數。當$m=1$時，顯然$n=1444=38^2$。當$m>1$時，

$$(k-38)(k+38)=k^2-1444=1000(m-1)=2^3\cdot5^3\cdot(m-1).$$

由此可知：4為$k-38$的因數或為$k+38$的因數。但因$(k+38)-(k-38)=76$為4的倍數，故4必為$k-38$與$k+38$的公因數。另一方面，因為5不是76的因數，故兩數$k-38$與$k+38$中恰有一數是$4\cdot5^3=500$的倍數。於是，$k=500t+38$或$500t-38$。經檢驗，這樣的整數k均滿足：$n=k^2$的個十百位數字都是4。因此，

$$n=k^2=(500t\pm38)^2,\quad \forall t=0,1,2,3,\cdots.$$

當n是八位數時，$10^7\le n<10^8$，可得$7\le t\le20$。故共有27種可能的八倍數為

$$n=(500t+38)^2,\quad t=7,8,9,\cdots,19,$$

或

$$n=(500t-38)^2,\quad t=7,8,9,\cdots,20.$$

二、【解答】

設A_n的元素中，$s_1=1$且$s_n=0$的元素個數為a，而$s_1=1$且$s_n=1$的元素個數為b，則$s_1=0$且$s_n=1$的元素個數亦為a，所以$|A_n|=2a+b$，而A_{n+1}中，$s_1=1$且$s_{n+1}=1$的元素顯然可分成$s_1=1$，

$s_n=0$，$s_{n+1}=1$和$s_1=1$，$s_n=1$，$s_{n+1}=1$。因此，此類型元素有$a+b$個。另一方面，$s_1=0$且$s_{n+1}=1$的元素即為$s_1=0$，$s_2=1$，$s_{n+1}=1$的元素，故有b個，同理$s_1=1$且$s_{n+1}=0$的元素亦有b個，因此$\left|A_{n+1}\right|=a+3b$。類似的分析可得$\left|A_{n+2}\right|=3a+4b$，故得$\left|A_{n+2}\right|=\left|A_{n+1}\right|+\left|A_n\right|$。

三、【解答】

(1)只需證明$a,b\geq 0$的情形即可，不妨設$a\geq b\geq 0$，

此時$a\geq ra+(1-r)b\geq b\geq 0$，令$ra+(1-r)b=\theta$.

由

$$
\begin{aligned}
& ra^4+(1-r)b^4-\theta^4 \\
&=r\left(a^4-\theta^4\right)+(1-r)\ \left(b^4-\theta^4\right) \\
&=r(a-\theta)\left(a^3+a^2\theta+a\theta^2+\theta^3\right)+(1-r)(b-\theta)\left(b^3+b^2+b\theta^2+\theta^3\right) \\
&=r(1-r)(a-b)\left(a^3+a^2\theta+a\theta^2+\theta^3\right)+(1-r)r(b-a)\left(b^3+b^2\theta+b\theta^2+\theta^3\right) \\
&=r(1-r)(a-b)\left[a^3+a^2\theta+a\theta^2-b^3-b^2\theta-b\theta^2\right]\geq 0
\end{aligned}
$$

且等號成立$\Leftrightarrow a=b$.

(2)設$P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$為L和Γ的兩相異交點。

則P_1和P_2之間的點可表為

$P\left(rx_1+(1-r)x_2,ry_1+(1-r)y_2\right)$，$0<r<1$。

利用(1)的結果可得

$$
\begin{aligned}
& \left[\left(rx_1+(1-r)x_2\right)\right]^4+\left[\left(ry_1+(1-r)y_2\right)\right]^4 \\
&\leq rx_1^4+(1-r)x_2^4+ry_1^4+(1-r)y_2^4 \\
&=r\left(x_1^4+y_1^4\right)+(1-r)\left(x_2^4+y_2^4\right)=r+(1-r)=1
\end{aligned}
$$

因為"="成立於$x_1=x_2$，$y_1=y_2$，而$P_1\neq P_2$，因此

$$\left[\left(rx_1+(1-r)x_2\right)\right]^4+\left[\left(ry_1+(1-r)y_2\right)\right]^4<1$$

即知$P\notin\Gamma$，故Γ和L頂多只有兩交點！