九十學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（二）

注意事項：

(1)時間分配：2 小時（16:00～18:00）。

(2)配分：每題皆為 7 分。

(3)不可使用計算器。

一、找出所有的八位數 n，使得 n 是一完全平方數，且 n 的個、十、百位數字都是 4。

二、對於每一自然數 n，定義集合 A_n 如下：

$A_1=\{(1)\}$，且對於 $n\geq 2$，

$$A_n=\left\{\ (s_1,s_2,\cdots,s_n)\ \middle|\ s_i=0\text{ 或 }1\text{，且對於 }i=1,2,\cdots,n-1,\ s_i+s_{i+1}\geq 1,\ \ s_n+s_1\geq 1\right\},\quad \forall n\geq 2$$

令 $|A|$ 表示集合 A 的元素個數，試找出 $|A_n|$，$|A_{n+1}|$，$|A_{n+2}|$ 三者的關係並證明之。

三、(1)若 $0<r<1$，a,b 為任意實數，試證明不等式

$$ra^4+(1-r)b^4\geq\{\ ra+(1-r)b\ \}^4$$

成立，且等號成立的充分且必要條件為 $a=b$。

(2)設 Γ 是由 $x^4+y^4=1$ 所定義的平面上的曲線，試證明：若 L 為平面上的直線，則 L 和 Γ 至多相交於兩點。