

九十學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題 (一)

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時 (13:20~15:20)。
 - (2) 配分：每題皆為 7 分。
 - (3) 不可使用計算器。
-

一、試找出所有正整數 a, b, c 使得 $ab + bc + ca$ 為質數，且滿足

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b+c}{b+a}.$$

二、已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， P 為 $\triangle ABC$ 內部的一點且

$\angle PBA = \angle PCB$ ，並設 $\triangle BCP$ 的外心為 O ，試證明：

(1) $\overline{OB} \perp \overline{AB}$.

(2) $\overline{AC} \cdot \overline{BA}^2 \leq \overline{AC} \cdot \overline{AP}^2 + \overline{AP} \cdot \overline{BC}^2$.

三、小華為了參加這次數學競賽，研擬出一參賽計畫如下：

- (i) 考前 30 天開始，每天至少做 1 題，至多做 12 題數學題目；
- (ii) 若某一天做超過 7 題，則接下來的 3 天，每天至多做 5 題；
- (iii) 若某一天做不到 5 題，則接下來的 2 天，每天至少做 7 題。

試問依此計畫 (同時滿足(i)(ii)(iii))，小華這 30 天內最多可做幾道數學題？最少要做幾道數學題？