九十學年度全國高中數學科能力競賽決賽

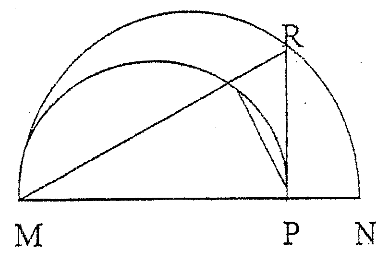
獨立研究試題（二）【參考解答】

三、【解答】

該公司可發出的識別證頂多有26^5個，證明如下：假設可發出的識別證超過26^5個，讓我們注意識別證的前 5 個英文字母，因為由此 5 個位置所決定的英文字串只有26^5個。因此必有某兩個識別證的前 5 個字母完全相同，此不合要求！

接下來說明設計的方式，令英文字母$A,B,C,\cdots$分別和$0,1,2,\cdots,25$對應，前 5 個位置任意放置 26 個英文字母，而且設此 5 個位置的對應數字的和被 26 除所得之餘數為a，$0\le a\le 25$，則第 6 個位置放置和a相對應的英文字母，依此方式設計的識別證可以符合要求，論證如下：任兩個識別證的前 5 個位置若有 2 個位置英文字母不相同，則符合要求；若只有一個位置的字母不相同，則前 5 個位置的字母所對應的數字和必不相同，因此第 6 個位置的字母也就不相同，因此有兩個位置的字母不相同，符合要求！

四、【解答】



(1) 首先假設M,Q,R三點共線，

並令$\overline{MP}=a$，$\overline{PN}=\overline{PQ}=b.$

因為$\overline{PR}$為直角三角形MRN在$\overline{MN}$邊上的高，

所以$\overline{PR}^2=\overline{MP}\cdot\overline{PN}=ab$，進而$\overline{MR}^2=\overline{MP}^2+\overline{PR}^2=a^2+ab$，

另外$\overline{PQ}\perp\overline{MR}$，所以$\overline{MR}\cdot\overline{PQ}=\overline{PR}\cdot\overline{PM}$

即有$\overline{MR}^2\cdot\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2\cdot\overline{PM}^2$ ——①

將前述$\overline{MR}^2=a^2+ab$，$\overline{PQ}=b$，$\overline{PR}^2=ab$，$\overline{PM}=a$

代入①式，整理可得$a^2-ab-b^2=0.$

解之得$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}.$

反之，若$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，可令$\overline{MR}$與$\overline{MP}$半圓弧的交點為$Q'$，仿前則有

$$\overline{MR}^2\cdot\overline{PQ'}^2=\overline{PR}^2\cdot\overline{PM}^2$$

今將$\overline{MR}^2=a^2+ab$，$\overline{PR}^2=ab$，$\overline{PM}^2=a^2$代入上式，並利用$\dfrac{a}{b}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，可解得$\overline{PQ'}=b.$故$Q=Q'$即$M,Q,R$三點共線。

(2)設$s=x+y$，$p=xy$，則$w-z=s$，

$$\frac{s}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{w}-\frac{1}{z}=\frac{-s}{zw}$$

$\Rightarrow s=0$　或　$p=-zw$

若$s=0\Rightarrow y=-x,w=z$

若$p=xy=-zw\Rightarrow -z$和w是$t^2-st+p=0$的兩根，但x和y也是此一元二次方程式的根$\Rightarrow\begin{cases}w=x\\z=-y\end{cases}$　或　$\begin{cases}w=y\\z=-x\end{cases}$

$\therefore$解集合為$\{(x,y,z,w)\in R^4\mid$ w等於x,y,z三數之一，而另外兩數互為加法反元素，x,y,z,w四數皆不為零 $\}$。