

九十學年度全國高中數學科能力競賽決賽

獨立研究試題 (二)

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時 (10:10~12:10)。
 - (2) 配分：每題皆為 7 分。
 - (3) 不可使用計算器。
-

三、某公司發出的員工識別證是由可重覆的 6 個英文字母排成一列所組成，但要求任意兩個識別證至少有兩個位置的英文字母不相同 (如 ABCDEF 和 ABCDEH 不能同時使用)。試問該公司可以如何設計識別證，使得可發出的識別證最多？請證明你的結果。

四、(1) 設 P 為介於 M, N 之間的一點，以 \overline{MN} 及 \overline{MP} 為直徑在直線 MN 的同一側各畫一半圓， R 為大半圓上的一點，且有 $\overline{RP} \perp \overline{MN}$ ； Q 為小半圓上異於 M 的一點，且有 $\overline{PQ} = \overline{PN}$ 。

試證明： M, Q, R 三點共線的充分且必要條件是 $\frac{\overline{MP}}{\overline{PN}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 。

(2) 試決定以下方程組的所有實數解：

$$\begin{cases} x + y + z = w \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{w} \end{cases}$$