九十學年度全國高中數學科能力競賽決賽

獨立研究試題（一）【參考解答】

一、【解答】

當 $n=1$ 或 $a=1$ 時，這兩個代數式是相等的；其他情況則有

$$a^n+\frac{1}{a^n}-2>n^2\left(a+\frac{1}{a}-2\right)\text{，當 } n\neq 1\text{，}a\neq 1$$

1. 當 $n=1$ 時，它們都等於 $a+\frac{1}{a}-2$，故相等。

2. 當 $a=1$ 時，它們都等於 0，故相等。

3. 當 $n\neq 1$ 時，由

$$\left(a^n-1\right)^2=(a-1)^2\left(a^{n-1}+\cdots+a+1\right)^2>(a-1)^2\left(n\cdot\sqrt[n]{a^{n-1}\cdots a^2a}\right)^2$$

$$=(a-1)^2\left(n\cdot\sqrt[n]{a^{1+2+\cdots+(n-1)}}\right)^2=n^2a^{n-1}(a-1)^2$$

可知 $\left(a^n-1\right)^2>n^2a^{n-1}(a-1)^2$。整理後可得

$$a^{2n}-2a^n+1>n^2a^{n-1}\left(a^2-2a+1\right)$$

$$\Rightarrow\frac{a^{2n}-2a^n+1}{a^n}>n^2\,\frac{a^{n-1}\left(a^2-2a+1\right)}{a^n}$$

$$\Rightarrow a^n+\frac{1}{a^n}-2>n^2\left(a+\frac{1}{a}-2\right).$$

二、【解答】

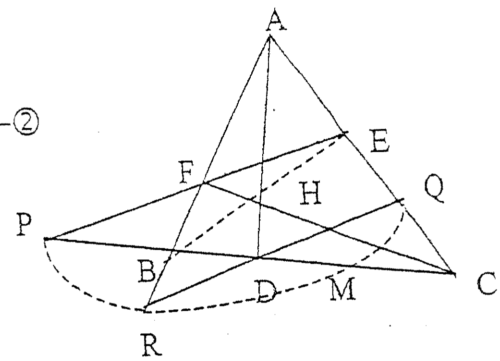
(1)因為三高 $\overline{AD},\overline{CF},\overline{BE}$ 必交於一點 H，由西瓦定理可知

$\overline{AF}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CE}=\overline{BF}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AE}$ ——①

又直線 EF 和直線 BC 交於 P

由孟氏定理可知

$\overline{CE}\cdot\overline{AF}\cdot\overline{PB}=\overline{AE}\cdot\overline{BF}\cdot\overline{PC}$ ——②



由①，②可得

$\dfrac{\overline{PB}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{PC}}{\overline{CD}}$ (＊)

(2)由 $\angle ACB+\angle EHD=180^0=\angle AHE+\angle EHD$

易知 $\angle ACB=\angle AHE$

又 $A.F.H.E$ 顯然共圓，因此 $\angle AFE=\angle AHE$

再者 $\overline{EF}\,//\,\overline{RQ}$，所以 $\angle AFE=\angle ARQ$

綜合前述，可得 $\angle ARQ=\angle ACB$

因此 $\Delta BDR\sim\Delta QDC$

進而有 $\overline{BD}\cdot\overline{CD}=\overline{RD}\cdot\overline{DQ}$ ——③

令 ΔPQR 的外接圓交 $\overline{BC}$ 於 M

所以 $\overline{PD}\cdot\overline{DM}=\overline{RD}\cdot\overline{DQ}$ ——④

由③，④易知

$\overline{BD}\cdot\overline{CD}=\overline{PD}\cdot\overline{DM}$ (＊＊)

令 $\overline{PB}=a,\overline{BD}=b,\overline{DM}=c,\overline{CM}=d$

則(＊)和(＊＊)的結果可表成

$a(c+d)=b(a+b+c+d)$ ——⑤

$b(c+d)=(a+b)\cdot c$ ——⑥

由⑥得 $bd=ac$ ——⑦

代入⑤可得

$ad=b(a+b+c)$ ——⑧

由⑦，⑧易得

$abd^2=abc(a+b+c)$

整理之，並由⑦可得

$$d^2 = c(a+b+c)$$

$$= bd + c(b+c)$$

分解 $[d-(b+c)][d+c]=0$

因此 $d = b + c$

即有 $\dfrac{\overline{BM}}{\overline{CM}} = 1.$