

# 九十學年度全國高中數學科能力競賽決賽

## 獨立研究試題 (一)

注意事項：

(1) 時間分配：2 小時 (8:00~10:00)。

(2) 配分：每題皆為 7 分。

(3) 不可使用計算器。

一、已知  $n$  為正整數， $a$  為正實數，試確定

$$a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \quad \text{與} \quad n^2 \left( a + \frac{1}{a} - 2 \right)$$

的大小關係並證明之。

二、已知  $\triangle ABC$  為一銳角三角形且  $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ ，設  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$ ,  $\overline{CF}$  分別為此三角形三邊上的高。今過  $D$  點作直線  $L$  平行  $\overline{EF}$ ，並分別交直線  $AC$  及直線  $AB$  於  $Q$  和  $R$  兩點，又直線  $BC$  和直線  $EF$  之交點為  $P$ 。

(1) 試證明  $\frac{\overline{PB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{CD}}$ 。

(2) 設  $\triangle PQR$  的外接圓交  $\overline{BC}$  於  $M$ ，試求  $\frac{\overline{BM}}{\overline{CM}}$  之值。