

5. 參考解答

(必存在 E 點, 使得 $\triangle ABE \sim \triangle CDE$, 其理由如下)

若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, 則 E 即為對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 之交點

若 $\overline{AB} \not\parallel \overline{CD}$, 如下圖, 設直線 AB 與直線 CD 相交於 F 點

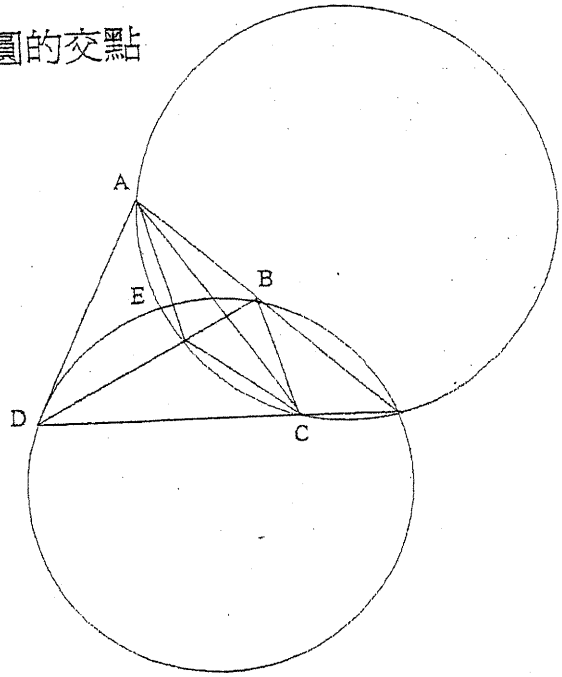
令 E 為 $\triangle ACF$ 的外接圓與 $\triangle BDF$ 的外接圓的交點

因為 A, E, C, F, 四點共圓

所以 $\angle EAF = \angle ECD$

同理可證: $\angle EBA = \angle EDC$

故 $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.



6. 參考解答

因為 $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k(k^2+1)} = \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)} \right)$, $\forall k=2,3,\dots$

所以 $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2001^3}$

$$< 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right]$$

$$+ \dots + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2000 \cdot 1999} - \frac{1}{2000 \cdot 2001} \right]$$

$$= 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \times 2000 \times 2001} < \frac{5}{4}$$