

教育部八十八學年度高級中學數學科能力競賽決賽
筆試試題(一)

注意事項：

- (1) 時間分配：2小時(10:00 - 12:00)
- (2) 配分：每題皆為7分。
- (3) 不可使用計算器。

問題(一)、設 $ABCD$ 為一個凸四邊形，兩條對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 O 點，且 $\overline{AO} = \overline{OC}$ 。若 P 點為線段 \overline{AO} 的任一內點，延長 \overline{BP} 交 \overline{AD} 於 E 點，延長 \overline{DP} 交 \overline{AB} 於 F 點。其次，延長 \overline{FO} 交 \overline{CD} 於 H 點，延長 \overline{EO} 交 \overline{BC} 於 G 點。試證： $\overline{FG} \parallel \overline{EH}$ 。

問題(二)、設 a, b 為正整數，且 a 的所有正因數之積等於 b 的所有正因數之積，試證： $a = b$ 。

問題(三)、設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 為一個 n 次整係數多項式， k 為正整數且 $0 < k < n$ 。若存在一個質數 p 使得 $p \mid a_k$ ，且 $p \mid a_{k-1}, \cdots, p \mid a_1, p \mid a_0$ ，但 $p^2 \nmid a_0$ 。試證：存在一個整係數多項式 $g(x)$ 滿足下列條件：

- (1) $g(x)$ 的次數大於或等於 k ，
- (2) $g(x)$ 為 $f(x)$ 的因式，
- (3) $g(x)$ 不可能分解成兩個次數都大於或等於1的整係數多項式的乘積。