

教育部八十七學年度高級中學  
數學競賽決賽筆試試題(一)

編號: \_\_\_\_\_

注意事項:

1. 本試卷共三題計算證明題, 每題35分.
2. 考試時間: 2小時.
3. 計算紙必須連同答案卷交回.
4. 不可使用計算器.
5. 請將答案寫在答案卷內.

問題一. 試確定所有的正質數 $p$ , 使得 $\frac{p(p+1)+2}{2}$ 為完全平方數.

問題二. 給定一圓, 其圓心為 $O$ , 設點 $A$ 與 $B$ 在此圓的內部, 且 $\overline{AB}$ 的中點是 $O$ . 對於在此圓上但不在直線 $AB$ 上的任意點 $M$ , 作矩形 $MAQP$ 使得直線 $MQ$ 通過 $O$ . 試證:  $\overline{PA} + \overline{PB}$ 為定值(即與 $M$ 點的位置無關).

問題三. 在一個八位數中, 若每一出現的數字都至少出現三次, 就稱這種八位數是一個“好數”. 例如: 11111111 和 98889898 都是好數, 但是 11221111 和 23244442 都不是好數.

試問有多少個八位數是好數?