教育部八十七學年度高級中學
數學競賽決賽獨立研究試題解答

[獨立研究問題1解答]：我們將用以下的事實：

$$(1)\ a \equiv b\ (mod\ 100) \Rightarrow a \equiv b\ (mod\ 4)$$

$$(2)\ a \equiv b\ (mod\ 4) \Rightarrow a^2 \equiv b^2\ (mod\ 8).$$

首先求 $a_k \equiv r_k\ (mod\ 4)$ 之規律：

$a_1 \equiv 0$, $a_2 \equiv 3$, $a_3 \equiv 2$, $a_4 \equiv 1$,

$a_5 \equiv 0$, $a_6 \equiv 3$, $a_7 \equiv 2$, $a_8 \equiv 1$,

.....

$a_{4n+1} \equiv 0$, $a_{4n+2} \equiv 3$, $a_{4n+3} \equiv 2$, $a_{4n+4} \equiv 1$,

.....

由以上的規律知

$$a_{4n+1}^2 \equiv 0\ ,\ a_{4n+2}^2 \equiv 1\ ,\ a_{4n+3}^2 \equiv 4\ ,\ a_{4n+4}^2 \equiv 1\ \ (mod\ 8)$$

因此，

$$\sum_{k=88}^{1999} a_k^2 = (a_{88}^2 + a_{89}^2 + a_{90}^2 + a_{91}^2) + \cdots + (a_{1996}^2 + a_{1997}^2 + a_{1998}^2 + a_{1999}^2)$$

$$\equiv 6 + 6 + \cdots + 6 \equiv 6 \cdot 478 \equiv 4\ (mod\ 8).$$

[獨立研究問題2證明]：作$\triangle ABF$的外接圓，且設交EF於M. 因爲$\angle EMA = \angle FBA = \angle ADC$, 所以$E, M, A, D$四點共圓. 於是，由圓冪定理可知

$$FM \cdot FE = FA \cdot FD = OF^2 - r^2,$$

且

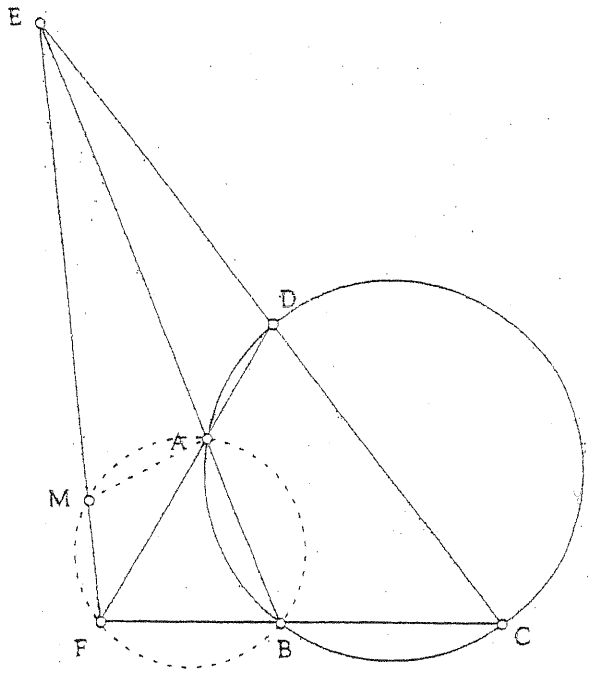
$$EM \cdot FE = EA \cdot EB = OE^2 - r^2.$$

兩式相加可得

$$EF^2 = EF \cdot (EM + FM) = OE^2 + OF^2 - 2r^2.$$

因此，

$$r = \sqrt{\frac{OE^2 + OF^2 - EF^2}{2}}.$$



[獨立研究問題3解答]：顯然，

$$\frac{1900 - 1758}{2} = 71 \leq \text{週期} \leq 79 = \frac{1758 - 1600}{2}.$$

(1) 若週期爲77, 78, 79, 則與14世紀出現2次矛盾！

(2) 若週期爲74, 75, 則與11世紀出現1次矛盾！

(3) 若週期爲71, 72, 73, 則與12世紀出現1次矛盾！

所以，哈雷彗星的週期應爲76年

[獨立研究問題4證明]：首先由鴿籠原理知，三數a,b,c中必有兩數之和(設爲$a+b$)大於

$$\frac{2}{3}\cdot(3\sqrt{2}+\sqrt{6})=\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{3}.$$

又易知，邊長1的正12邊形之外接圓O半徑

$$r=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

故

$$a+b>\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{3}=\frac{4\sqrt{3}r}{3}.$$

假設這兩個正三角形Δa與Δb不重疊，則必有一直線L將它們分離．設L_a,L_b爲外接圓O的兩條與直線L平行的切線，設其切點各爲A,B.則有

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a=h_a\le d(L,L_a)\quad 且\quad \frac{\sqrt{3}}{2}b=h_b\le d(L,L_b),$$

其中h_a與h_b分別表示Δa與Δb的高．於是

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b\le d(L,L_a)+d(L,L_b)=\overline{AB}=2r.$$

即

$$a+b\le\frac{4\sqrt{3}r}{3}.$$

矛盾！故兩正三角形Δa與Δb會有重疊的部分．

[獨立研究問題5解答]：令$d(k)$表示k的正因數個數．若k是n^2的正因數且小於n，則$\frac{n^2}{k}$是n^2的正因數且大於n.於是，可知$d(n^2)$必爲一奇數．對於滿足條件的正整數解(a,b)，顯然有$a<n$.因此，我們可令$a=n-k$且$b=l-n$，其中$1\le k<n<l$.則代入原式可得$kl=n^2$.因$k<n$，故k有$\frac{d(n^2)-1}{2}$種可能的選法．於是可知對應的正整數解(a,b)有$\frac{d(n^2)-1}{2}$組．

更進一步地，考慮n的質因數分解

$$n=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_l^{s_l}.$$

則所求的正整數解(a,b)之個數爲

$$\frac{d(n^2)-1}{2}=\frac{1}{2}\left((2s_1+1)(2s_2+1)\cdots(2s_l+1)-1\right).$$

[獨立研究問題6證明]：因爲

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n+1}-1<0,\ \forall\, n=0,1,2,3,\cdots,$$

故數列$\langle a_n\rangle$是嚴格遞減的正數列. 因此,

$$\begin{aligned}a_n&=a_0+(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})\\&=1999+(\frac{1}{a_0+1}-1)+(\frac{1}{a_1+1}-1)+\cdots+(\frac{1}{a_{n-1}+1}-1)\\&=1999-n+\left(\frac{1}{a_0+1}+\frac{1}{a_1+1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}+1}\right).\end{aligned}$$

於是,

$$a_0>a_1>a_2>\cdots>a_{999}>1999-999=1000.$$

由此可得

$$0<\frac{1}{a_0+1}+\frac{1}{a_1+1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}+1}<\frac{n}{a_{n-1}+1}\le\frac{1000}{a_{999}+1}<1,$$

$$\forall\, n=0,1,2,\cdots,1000.$$

因此, $1999-n<a_n<2000-n, \forall n=0,1,2,\cdots,1000$, 於是得

$$[a_n]=1999-n,\ \forall\, n=0,1,2,\cdots,1000.$$

[獨立研究問題7解答]:因爲對於任意的正整數m,n,恆有

$$(m+n)^m\ge n^m+m^m,$$

因此,

$$m^m\le(m+n)^m-n^m=117.$$

於是, $m\le 3$.

(i) 若$m=1$, 則$1+n=n+117$, 矛盾!

(ii) 若$m=2$, 而n爲偶數, 則$(m+n)^m$是偶數, 而n^m+117是奇數, 此時, $(m+n)^m\ne n^m+117$.

(iii) 若$m=2$, 而n爲奇數, 則$(m+n)^m$是奇數, 而n^m+117是偶數, 此時, $(m+n)^m\ne n^m+117$.

(iv) 若$m=3$, 則$(n+3)^3=n^3+117$若且唯若$n^2+3n-10=0$, 得$n=2$.

因此, 正整數m,n滿足$(m+n)^m=n^m+117$若且唯若$m=3$, $n=2$.

[獨立研究問題8證明]:利用面積比例定理, 首先, 連$\overline{OV_1},\overline{OV_2},\cdots,\overline{OV_5}$, 則

$$\frac{V_1W_1}{W_1V_2}\cdot\frac{V_2W_2}{W_2V_3}\cdot\frac{V_3W_3}{W_3V_4}\cdot\frac{V_4W_4}{W_4V_5}\cdot\frac{V_5W_5}{W_5V_1}$$

$$=\frac{\Delta OV_1Z_1}{\Delta OV_2Z_1}\cdot\frac{\Delta OV_2Z_2}{\Delta OV_3Z_2}\cdot\frac{\Delta OV_3Z_3}{\Delta OV_4Z_3}\cdot\frac{\Delta OV_4Z_4}{\Delta OV_5Z_4}\cdot\frac{\Delta OV_5Z_5}{\Delta OV_1Z_5}$$

$$=\frac{\Delta OV_1Z_1}{\Delta OV_5Z_4}\cdot\frac{\Delta OV_2Z_2}{\Delta OV_1Z_5}\cdot\frac{\Delta OV_3Z_3}{\Delta OV_2Z_1}\cdot\frac{\Delta OV_4Z_4}{\Delta OV_3Z_2}\cdot\frac{\Delta OV_5Z_5}{\Delta OV_4Z_3}$$

$$=\frac{Z_1V_1}{Z_4V_5}\cdot\frac{Z_2V_2}{Z_5V_1}\cdot\frac{Z_3V_3}{Z_1V_2}\cdot\frac{Z_4V_4}{Z_2V_3}\cdot\frac{Z_5V_5}{Z_3V_4}.$$

另一方面，

$$1=\frac{\Delta Z_1V_1V_2}{\Delta Z_5V_1V_5}\cdot\frac{\Delta Z_5V_1V_5}{\Delta Z_4V_4V_5}\cdot\frac{\Delta Z_4V_4V_5}{\Delta Z_3V_3V_4}\cdot\frac{\Delta Z_3V_3V_4}{\Delta Z_2V_2V_3}\cdot\frac{\Delta Z_2V_2V_3}{\Delta Z_1V_1V_2}$$

$$=\frac{Z_1V_1\cdot V_1V_2}{V_1Z_5\cdot V_1V_5}\cdot\frac{V_1V_5\cdot V_5Z_5}{V_4V_5\cdot Z_4V_5}\cdot\frac{V_5V_4\cdot Z_4V_4}{V_4Z_3\cdot V_4V_3}\cdot\frac{V_3V_4\cdot V_3Z_3}{V_3V_2\cdot V_3Z_2}\cdot\frac{V_2Z_2\cdot V_2V_3}{V_2Z_1\cdot V_1V_2}$$

$$=\frac{Z_1V_1}{Z_4V_5}\cdot\frac{Z_2V_2}{Z_5V_1}\cdot\frac{Z_3V_3}{Z_1V_2}\cdot\frac{Z_4V_4}{Z_2V_3}\cdot\frac{Z_5V_5}{Z_3V_4}.$$

於是，合併前面的結果可得

$$\frac{\overline{V_1W_1}}{\overline{W_1V_2}}\cdot\frac{\overline{V_2W_2}}{\overline{W_2V_3}}\cdot\frac{\overline{V_3W_3}}{\overline{W_3V_4}}\cdot\frac{\overline{V_4W_4}}{\overline{W_4V_5}}\cdot\frac{\overline{V_5W_5}}{\overline{W_5V_1}}=1.$$