教育部八十七學年度高級中學
數學競賽決賽獨立研究試題

問題1. 已知$a_1 = 88, a_2 = 99$, 且當$n \geq 1$時, a_{n+2}表示$3a_n + 2a_{n+1}$除以100之後所得的餘數. 試確定

$$\sum_{k=88}^{1999} a_k^2 = a_{88}^2 + a_{89}^2 + \cdots + a_{1999}^2$$

除以8之後所得的餘數.

問題2. 設$ABCD$是以O爲圓心, r爲半徑的圓內接四邊形. 設對邊BA及CD的延長線交於E, 而DA及CB的延長線交於F. 試證:

$$r = \sqrt{\frac{OE^2 + OF^2 - EF^2}{2}}.$$

問題3. 哈雷在他的好朋友牛頓的協助下, 成功的計算出一顆彗星(就是有名的哈雷彗星)會於西元1758年光臨地球, 而且這是那世紀唯一的一次光臨, 同時他們也計算出十九世紀這顆彗星僅光臨地球一次. 事實上, 中國的天文學家早已注意哈雷彗星很久, 翻開歷史記錄得知: 此顆彗星在第十四及第十七世紀時, 分別光臨地球兩次; 但是在第十一及第十二世紀時, 哈雷彗星分別僅光臨地球一次而已. 請你根據這些資料, 算出哈雷彗星的週期. (註明: 哈雷彗星的週期剛好是整數年, 第十一世紀是指西元1000年至西元1099年)

問題4. 設a, b, c都是正數, 且$a + b + c > 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$. 試證: 隨意將邊長各爲$a, b, c$的三個正三角形放入一個邊長1的正12邊形中, 則必有兩個正三角形會有重疊的部分.

問題5. 設n是一給定的正整數. 試問滿足下列方程式

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

的正整數解(a, b)有多少組?

問題6. 設數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_0 = 1999$, 且

$$a_n^2 = a_{n+1}(a_n + 1), \ \forall\, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

試證:

$$[a_n] = 1999 - n, \ \forall\, n = 0, 1, 2, \cdots, 1000,$$

其中$[x]$表示不大於x的最大整數.

問題7. 試求所有的正整數m, n使得

$$(m + n)^m = n^m + 117\,.$$

問題8. 設$V_1V_2V_3V_4V_5$爲凸五邊形, O爲內部一點. 對每一個i, 令Z_i爲直線$V_{i-1}V_i$與$V_{i+1}V_{i+2}$的交點, 且令$\overline{OZ_i}$與$\overline{V_iV_{i+1}}$相交於W_i (其中$V_0 \equiv V_5, V_1 \equiv V_6, V_2 \equiv V_7$). 試證:

$$\frac{\overline{V_1W_1}}{\overline{W_1V_2}} \cdot \frac{\overline{V_2W_2}}{\overline{W_2V_3}} \cdot \frac{\overline{V_3W_3}}{\overline{W_3V_4}} \cdot \frac{\overline{V_4W_4}}{\overline{W_4V_5}} \cdot \frac{\overline{V_5W_5}}{\overline{W_5V_1}} = 1\,.$$