教育部八十七學年度高級中學
數學競賽決賽口試試題解答

[口試題一證明]：因為 P, C, D, E 四點共圓，由正弦定理得

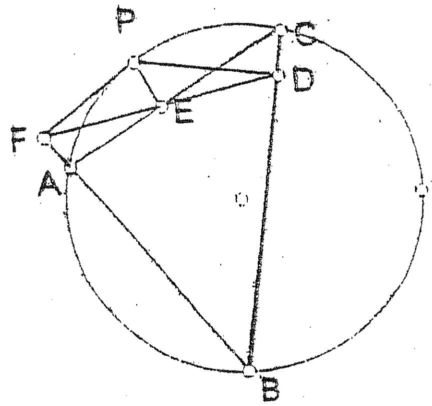
$$\frac{ED}{\sin\angle ACB}=\frac{CE}{\sin\angle CDE}=\frac{CE}{\sin\angle CPE}=\frac{PC}{\sin\angle CEP}=PC.$$

同理，由 P, F, A, E 四點共圓，得

$$\frac{EF}{\sin\angle BAC}=AP.$$

再由 $\overline{DE}=\overline{EF}$，及正弦定理，可得

$$\frac{AP}{PC}=\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle BAC}=\frac{AB}{BC}.$$



[口試題二證明]：令 $a=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_n^{r_n}$，$b=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_n^{s_n}$，其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 為相異的質數．則

$$\begin{aligned}S(ab)&=(1+p_1+\cdots+p_1^{r_1+s_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{r_2+s_2})\cdots(1+p_n+\cdots+p_n^{r_n+s_n})\\&\le(1+p_1+\cdots+p_1^{r_1})(1+p_1+\cdots+p_1^{s_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{r_2})\\&\quad(1+p_2+\cdots+p_2^{s_2})\cdots(1+p_n+\cdots+p_n^{r_n})(1+p_n+\cdots+p_n^{s_n})\\&=S(a)S(b).\end{aligned}$$

因此，我們只須證明對每一奇質數 p，都有 $S(p)<p\sqrt[3]{p}$．但此不等式顯然是成立的，因為

$$(S(p))^3=(1+p)^3\le\left(\frac{4p}{3}\right)^3=\frac{64}{27}p^3<p^4.$$